باب 4

مستوی میں حرکت

(MOTION IN A PLANE)

4.1 تعارف (INTRODUCTION)

پچھلے سبق میں ہم نے مقام (position)، نقل (displacement)، رفتار اور اسراع کے تصورات کو فروغ دیا تھا، جن کی کسی شے کی خط مستقیم پر حرکت کا بیان کرنے کے لیے ضرورت پڑتی ہے۔ چونکہ یک بعدی حرکت میں محض دو ہی سمتیں ممکن ہیں، اس لیے ان مقداروں کے سمتی پہلوؤں کو + اور – نشانات سے ظاہر کر سکتے ہیں لیکن جب ہم اشیا کی حرکت دو ابعاد (two dimensions) (ایک مستوی) یا تین ابعاد (فضا) میں بیان کرنا چاہتے ہیں تب ہمیں درج بالا طبعی مقداروں کے مطالعہ کے لیے سمتیوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ لہٰذا سب سے پہلے ہم سمتیوں کی زبان سیکھیں گے۔ سمتیہ کیا ہے؟ سمتیوں کو کیسے جوڑا، نفی کیا یا ضرب کیا جاتا ہے؟ سمتیوں کو کسی حقیقی عدد سے ضرب کریں تو ہمیں کیا نتیجہ حاصل ہوگا؟ یہ سب ہم اس لیے سیکھیں گے تاکہ مستوی میں کسی شے کی رفتار اور اسراع کو معرف کرنے کے لیے ہم سمتیوں کا استعمال کر سکیں۔ اس کے بعد ہم مستوی میں کسی شے کی رفتار پر بحث کریں گے۔ کسی مستوی میں حرکت کی آسان مثال کے طور پر ہم یکساں اسراعی حرکت کا مطالعہ کریں گے اور ایک پروجکٹائل حرکت کے بارے میں تفصیلی مطالعہ کریں گے۔ دائری رفتار سے ہم اچھی طرح واقف ہیں جس کی ہماری روز مرہ زندگی میں خاص اہمیت ہے۔ ہم یکساں دائری حرکت کا تفصیلی بیان کریں گے۔

ہم اس باب میں جو مساواتیں حاصل کریں گے ان کی آسانی سے سہ ابعادی حرکت کے لیے توسیع کی جا سکتی ہے۔

4.2 عددیے اور سمتیے (SCALARS AND VECTORS)

طبیعیات میں ہم طبعی مقداروں کو عددیہ اور سمتیہ میں درجہ بند کر سکتے ہیں۔ دونوں میں بنیادی فرق یہ ہے کہ سمتیہ کے ساتھ سمت منسلک ہوتی ہے جبکہ عددیہ کے ساتھ ایسا نہیں ہے۔ ایک

عددیہ مقدار وہ مقدار ہوتی ہے جس میں محض عددی قدر (magnitude) ہوتی ہے۔ اس کو صرف ایک واحد عدد اور موزوں اکائی کے ذریعہ مکمل طور پر معین کیا جاسکتا ہے۔ اس کی مثالیں ہیں: دو نقاط کے درمیان کی دوری، کسی شے کی کمیت (mass)، کسی جسم کا درجہ حرارت اور وہ وقت جس میں کوئی وقوعہ واقع ہوتا ہے۔ عددیہ کے اجتماع میں وہی اصول لاگو ہوتے ہیں جو عام طور پر الجبرا میں بروئے کار لائے جاتے ہیں۔ عددیہ کو ہم ٹھیک ویسے ہی جمع کرسکتے ہیں، تفریق کرسکتے ہیں، ضرب یا تقسیم کرسکتے ہیں جیسے کہ ہم اعداد کے ساتھ کرتے ہیں۔ مثال کے لیے اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی علی الترتیب 1.0 m اور 0.5 m ہے تو اس کا احاطہ (perimeter) چاروں بازوؤں کی لمبائیوں کی جمع 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m ہوگا۔ ہر بازو کی لمبائی ایک عددیہ ہے اور احاطہ بھی ایک عددیہ ہے۔ ہم ایک دوسری مثال پر غور کریں گے: اگر کسی ایک دن کا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجہ حرارت علی الترتیب 35.6°C اور 24.2°C ہے تو ان دونوں کا فرق 11.4°C ہوگا۔ اسی طرح اگر الومنیم کے کسی ہموار ٹھوس مکعب کا بازو 10 cm ہے اور اس کی کمیت 2.7 kg ہے تو اس کا حجم 10^{-3} m^3 (ایک عددیہ) ہوگا اور کثافت 2.7×10^3 kg m^3 بھی ایک عددیہ ہے۔

ایک سمتیہ مقدار وہ ہے جس میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں اور وہ جمع کے قانون مثلث (triangle law of addition) یا معاول طور پر جمع کے متوازی الاضلاع قانون (parallelogram law of addition) کی تعمیل کرتا ہے۔ اس طرح ایک سمتیہ کو اس کی قدر کے عدد اور سمت کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔ کچھ ایسی مقداریں جو سمتیوں کے ذریعے ظاہر کی جاتی ہیں: نقل (displacement)، رفتار، اسراع اور قوت۔

سمتیہ کو ظاہر کرنے کے لیے ہم اس کتاب میں موٹے حروف کا استعمال کریں گے، جیسے کہ رفتار سمتیہ کو ظاہر کرنے کے لیے **v** علامت کا استعمال کریں گے۔ لیکن ہاتھ سے لکھتے وقت چونکہ موٹے حروف کا لکھنا تھوڑا مشکل ہوتا ہے، اس لیے ایک سمتیہ کو حرف کے اوپر تیر لگا کر ظاہر کرتے ہیں، جیسے $\vec{v}$ اس طرح **v** اور $\vec{v}$ دونوں ہی رفتار سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ سمتیہ کی عددی قدر کو اکثر ہم اس کی مطلق قدر کہتے ہیں۔ اور اسے $v = |\mathbf{v}|$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح ایک سمتیہ کو ہم موٹے حرف جیسے **A** یا **a**, **p**, **q**, **r**, ... **x**, **y** سے ظاہر کرتے ہیں، جب کہ ان کی عددی قدروں کو ہم علی الترتیب A یا $a, p, q, r, ... x, y$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔

4.2.1 مقام اور نقل سمتیے

(Position and Displacement Vectors)

کسی مستوی میں متحرک شے کے مقام کو ظاہر کرنے کے لیے ہم آسانی کے لحاظ سے کسی نقطہ O کو مبدا (origin) کے طور پر چنتے ہیں۔ تصور کیجیے کہ دو مختلف اوقات t اور t' پر شے کے مقامات علی الترتیب P اور P' ہیں [شکل (a)4.1]۔ ہم P کو O سے ایک خط مستقیم سے جوڑ دیتے ہیں۔ اس طرح **OP** وقت t پر شے کا مقام سمتیہ ہوگا۔ اس خط کے آخری سرے پر ایک تیر کا نشان لگا دیتے ہیں۔ اسے کسی علامت (مان لیجیے) **r** سے پیش کرتے ہیں، یعنی **OP** = **r**۔ اسی طرح نقطہ P' کو ایک دوسرے مقام سمتیہ **OP′** یعنی **r′** سے ظاہر کرتے ہیں۔ سمتیہ **r** یا **r′** کی لمبائی اس کی عددی قدر کو ظاہر کرتی ہے اور O سے دیکھنے پر P اور P' جس سمت میں واقع ہوں، سمتیہ کی سمت بھی وہی کہلائے گی۔ اگر شے P سے چل کر P′ پر پہنچ جاتی ہے تو سمتیہ **PP′** (جس کی دم P پر اور چوٹی P′ پر ہے) نقطہ P (وقت t) سے P′ (وقت t') تک حرکت کا نقل یا نقل سمتیہ (displacement vector) کہلاتا ہے۔

شکل **(a) 4.1** مقام اور نقل سمتیے (b) نقل سمتیہ **PQ** اور حرکت کے مختلف راستے

یہاں یہ بات اہم ہے کہ نقل سمتیہ کو ایک خط مستقیم سے ظاہر کرتے ہیں جو شے کے آخری مقام کو اس کے ابتدائی مقام سے جوڑتا ہے اور یہ اس حقیقی راستے پر انحصار نہیں کرتا جو شے کے ذریعہ نقاط کے درمیان طے کیا جاتا ہے۔ مثال کے لیے، جیسا کہ شکل 4.1b میں دکھایا گیا ہے، ابتدائی مقام P اور آخری مقام Q کے درمیان طے کردہ دوریاں جیسے PDQ, PABCQ اور PBEFQ الگ الگ ہیں لیکن نقل سمتیہ $\overrightarrow{PQ}$ ہر صورت میں وہی ہے۔ اس طرح، کسی بھی دو نقاط کے درمیان نقل سمتیہ کی عددی قدر یا تو متحرک شے کی راہ کی لمبائی سے کم ہوتی ہے یا اس کے برابر ہوتی ہے۔ پچھلے باب میں بھی ایک خط مستقیم پر حرکت کے ضمن میں بحث کرتے وقت اسی حقیقت پر زور دیا گیا تھا۔

4.2.2 سمتیوں کی مساویت (Equality of Vectors)

دو سمتیوں **A** اور **B** کو صرف تبھی برابر کہا جاسکتا ہے جب ان کی عددی قدریں برابر ہوں اور ان کی سمت یکساں ہو**۔

شکل [(a) 4.2] میں دو مساوی سمتیوں **A** اور **B** کو دکھایا گیا ہے۔ ہم ان کی مساویت کی جانچ آسانی سے کرسکتے ہیں۔ **B** کو اس کے متوازی کھسکایئے تاکہ اس کی دم Q سمتیہ **A** کی دم پر منطبق ہوجائے۔ پھر چونکہ ان کے چوٹیاں S اور P بھی منطبق ہیں لہٰذا دونوں سمتیے برابر کہلائیں گے۔

شکل **4.2** (a) دو مساوی سمتیہ **A** اور **B**، (b) دو سمتیہ **A′** اور **B′** غیر مساوی ہیں اگرچہ ان کی لمبائیاں مساوی ہیں۔

عمومی شکل میں اس مساویت کو **A = B** کے طور پر لکھتے ہیں۔ اس بات پر غور کیجیے کہ شکل (b) 4.2 میں اگرچہ سمتیے **A′** اور **B′** کی عددی قدر مساوی ہے مگر پھر بھی دونوں سمتیے مساوی نہیں ہیں کیونکہ ان کی سمتیں الگ الگ ہیں۔ اگر ہم **B′** کو اس کے ہی متوازی کھسکائیں جس سے اس کی دم Q′ **A′** کی دم O′ سے منطبق ہوجائے تو بھی **B′** کی چوٹی S′، **A′** کی چوٹی P′ پر منطبق نہیں ہوگی۔

4.3 حقیقی اعداد سے سمتیوں کی ضرب (MULTIPLICATION OF VECTORS BY REAL NUMBERS)

اگر ایک سمتیہ **A** کو کسی مثبت عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک سمتیہ ہی ملتا ہے جس کی عددی قدر **A** کی عددی قدر کی λ گنا ہوجاتی ہے اور جس کی سمت بھی وہی ہے جو **A** کی ہے۔ اس حاصل ضرب کو ہم λ **A** لکھتے ہیں۔

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda\ |\mathbf{A}| \quad (\lambda > 0 \text{ اگر})$$

* عددیوں کی جمع و تفریق صرف انھیں مقداروں کے لیے بامعنیٰ ہوتی ھے جن کی اکائیاں ایک جیسی ہوتی ھیں۔ تاھم، آپ مختلف اکائیوں کے سمتیوں کو ضرب اور تقسیم کرسکتے ھیں۔

** ھمارے مطالعہ میں سمتیوں کے مقامات متعین نھیں ھیں۔ اس لیے جب ایک سمتیہ کو خود اس کے متوازی منتقل کرتے ھیں تو سمتیہ پر کوئی فرق نھیں پڑتا ھے۔ اس طرح کے سمتیہ کو ھم آزاد سمتیہ کہتے ھیں۔ حالانکہ طبیعی استعمال میں سمتیہ کے مقام یا اس کا اطلاقی خط اھم ھوتاھے۔ ایسے سمتیوں کو ھم مقامی (localized) سمتیہ کہتے ھیں۔ (باب 7 دیکھیے)۔

مثال کے لیے اگر **A** کو 2 سے ضرب کیا جائے تو حاصل سمتیہ **2A** ہوگا [شکل (a) 4.3] جس کی سمت **A** کی سمت ہوگی اور عددی قدر **|A|** کی دوگنی ہوگی۔

سمتیہ **A** کو اگر ایک منفی عدد (λ-) سے ضرب کریں تو ایک دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی سمت **A** کی سمت کے مخالف ہے اور جس کی عددی قدر **|A|** کی (λ) گنی ہوتی ہے۔

اگر کسی سمتیہ **A** کو منفی اعداد 1– اور 1.5– سے ضرب کریں تو حاصل سمتیے (b) 4.3 جیسے ہوں گے۔

شکل **4.3** (a) سمتیہ **A** اور اسے مثبت عدد سے ضرب کرنے پر حاصل سمتیہ (b) سمتیہ **A** اور اسے منفی اعداد 1- اور 1.5- سے ضرب کرنے پر حاصل سمتیہ

جس جز ضربی λ کے ذریعہ سمتیہ **A** کو ضرب کیا جاتا ہے وہ کوئی عددیہ ہوسکتا ہے اور اس کی اپنی طبیعی ابعاد (dimension) کچھ بھی ہوسکتی

شکل **4.4** (a) سمتیے A اور **B** (b) سمتیوں A اور **B** کو گرافی طریقے سے جوڑا گیا (c) سمتیوں **B** اور **A** کو گرافی طریقے سے جوڑا گیا (d) سمتیوں کے جوڑ سے متعلق اتصالی قانون

ہیں۔ لہٰذا **A** λ کے ابعاد λ اور **A** کے ابعاد کے حاصل ضرب کے برابر ہوں گے۔ مثال کے لیے اگر ہم کسی مستقلہ رفتار سمتیہ کو کسی مدت (وقت) سے ضرب کریں تو ہمیں ایک نقل سمتیہ حاصل ہوگا۔

4.4 سمتیوں کی جمع و تفریق : گرافی طریقہ
(ADDITION AND SUBTIRACTION OF VECTORS: GRAPHICAL METHOD)

جیسا کہ حصہ 4.2 میں بتایا جاچکا ہے کہ تعریف کے رو سے سمتیے جمع کے قانون مثلث یا معادل طور پر جمع کے متوازی الاضلاع کے قانون کی تعمیل کرتے ہیں۔ اب ہم گرافی طریقے کے ذریعہ جمع کے اس قانون کو بیان کریں گے۔ جیسا شکل (a)4.4 میں دکھایا گیا ہے، کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں **A** اور **B** پر غور کرتے ہیں۔ ان سمتیوں کو ظاہر کرنے والے خطی قطعات کی لمبائیاں سمتیوں کی عددی قدروں کے متناسب ہوتی ہیں۔ جمع **A+B** حاصل کرنے کے لیے شکل (b) 4.4 کے مطابق ہم سمتیہ **B** اس طرح رکھتے ہیں کہ اس کی دم سمتیہ **A** کی چوٹی پر ہو۔ پھر ہم **A** کی دم کو **B** کے سرے سے جوڑ دیتے ہیں۔ یہ خط OQ حاصل سمتیہ **R** کو ظاہر کرتا ہے جو سمتیوں **A** اور **B** کا حاصل جمع ہے۔ چونکہ سمتیوں کے جوڑنے کے اس طریقے میں ایک سمتیہ کی چوٹی کو دوسرے کی دم سے جوڑتے ہیں، اس لیے اس گرافی طریقے کو چوٹی سے دم (ہیڈ۔ٹو۔ٹیل) (head-to-tail) طریقے کے نام سے

جانا جاتا ہے۔دونوں سمتیے اور ان کا حاصل کسی مثلث کے تین ضلع تشکیل دیتے ہیں۔ اس لیے اس طریقے کو **سمتیوں کی جمع کا مثلث قانون** (triangle method of vector addition) بھی کہتے ہیں۔

اگر ہم **B+A** کا حاصل معلوم کریں تو بھی ہمیں وہی سمتیہ **R** حاصل ہوتا ہے [شکل (c)4.4] اس طرح سمتیوں کی **جمع تقلیبی** (commutative) ہوتی ہے۔

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (4.1)$$

سمتیوں کی جمع اتصالی قانون (associative law) کی بھی تعمیل کرتی ہے جیسا کہ [شکل (d)4.4] میں دکھایا گیا ہے۔سمتیوں **A** اور **B** کو پہلے جوڑ کر اور پھر سمتیہ **C** کو جوڑنے پر جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ وہی ہے جو سمتیوں **B** اور **C** کو پہلے جوڑ کر پھر **A** کو جوڑنے پر ملتا ہے،یعنی

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad (4.2)$$

دو مساوی اور مخالف سمتیوں کو جوڑنے پر کیا نتیجہ ملتا ہے؟ ہم دو سمتیوں **A** اور **A**–(جو **A** کا مساوی لیکن مخالف ہے) جنہیں [شکل (b) 4.3] میں دکھایا ہے، پر غور کرتے ہیں۔ان کی جمع $\mathbf{A} + (-\mathbf{A})$ ہے کیونکہ سمتیوں کی قدریں وہی ہیں لیکن سمتیں مخالف ہیں، اس لیے حاصل کی قدر 0 سے ظاہر کی جاتی ہے اور اسے **معدوم (null) سمتیہ یا صفر سمتیہ** (zero vector) کہتے ہیں۔

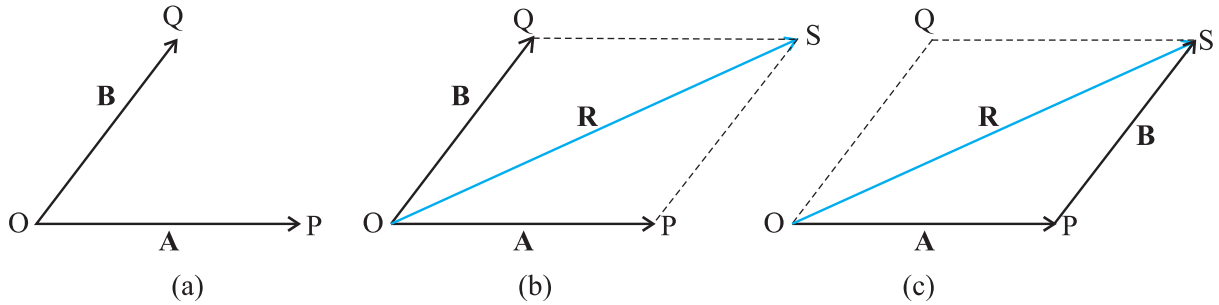
$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}\ ,\ |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

چونکہ معدوم سمتیہ کی عددی قدر صفر ہے اس لیے اس کی سمت کا تعین نہیں کیا جاسکتا۔ دراصل جب ہم ایک سمتیہ **A** کے عدد کو صفر سے ضرب کرتے ہیں تو نتیجہ ہمیں ایک نل سمتیہ ہی ملے گا۔**0** کی اہم خصوصیات درج ذیل ہیں :

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

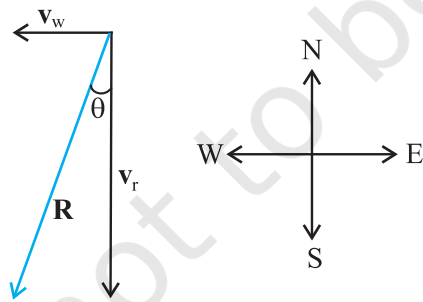
صفر سمتیہ کا طبعی مطلب کیا ہے؟ جیسا کہ [شکل (a) 4.1] میں دکھایا گیا ہے۔ہم ایک مستوی میں مقام اور نقل سمتیوں پر غور کرتے ہیں۔ مان لیجیے کہ کسی وقت t پر کوئی شے P پر ہے۔اور وہ 'P تک جا کر پھر P پر واپس آجاتی ہے۔ایسی حالت میں شے کا نقل کیا ہوگا؟ چونکہ ابتدائی اور آخری مقام منطبق ہوجاتے ہیں، اس لیے نقل ''معدوم سمتیہ'' ہوگا۔

سمتیوں کی تفریق کو سمتیوں کی جمع کی اصطلاح میں معرف کیا جاسکتا ہے۔ دو سمتیوں **A** اور **B** کے فرق کو ہم دو سمتیوں **A** اور **B**– کی جمع کے طور پر درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں :

شکل 4.5 (a) دو سمتیے **A** اور **B**، **B**– کو بھی دکھایا گیا ھے۔ (b) سمتیہ A سے سمتیہ **B** کو نفی کرنے پر حاصل $\mathbf{R}_2$ ھے۔ موازنہ کے لیے سمتیوں **A** اور **B** کا جوڑ یعنی $\mathbf{R}_1$ بھی دکھایا گیاھے

شکل 4.6 (*a*) دو سمتیے **A** اور **B**، جن کی دُمیں ایک مشترکہ مبدا پر ہیں۔ (*b*) متوازی الاضلاع کے طریقے کے ذریعہ **A + B** کا جمع حاصل کرنا (c) دو سمتیوں کو جوڑنے کی متوازی الاضلاع کا طریقہ مثلث طریقے کے معادل ہے۔

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

اسے شکل 4.5 میں دکھایا گیا ہے۔ سمتیہ **B−** کو سمتیہ **A** میں جوڑ کر $\mathbf{R_2} = (\mathbf{A}-\mathbf{B})$ حاصل ہوتا ہے۔ موازنہ کے لیے اسی شکل میں سمتیہ $\mathbf{R_1} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ کو بھی دکھایا گیا ہے۔ متوازی الاضلاع کے طریقے کا استعمال کرکے بھی ہم دو سمتیوں کی جمع حاصل کر سکتے ہیں۔ مان لیجیے ہمارے پاس دو سمتیے **A** اور **B** ہیں۔ ان سمتیوں کو جوڑنے کے لیے ان کی دم کو ایک مشترک بنیادی نقطہ O پر لاتے ہیں جیسا کہ [شکل (a) 4.6] میں دکھایا گیا ہے۔ پھر ہم **A** کی چوٹی سے **B** کے متوازی ایک خط کھینچتے ہیں اور **B** کی چوٹی سے **A** کے متوازی ایک دوسرا خط کھینچ کر متوازی الاضلاع OQSP پورا کرتے ہیں۔ جس نقطہ پر یہ دونوں خط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں، اسے مبداء O سے جوڑ دیتے ہیں۔ حاصل سمتیہ **R** کی سمت مشترکہ مبداء O سے متوازی الاضلاع کے وتر (OS) کی سمت میں ہوگی [شکل (b) 4.6]۔ [شکل (c) 4.6] میں سمتیوں **A** اور **B** کا حاصل نکالنے کے لیے قانون مثلث (triangle law) کا استعمال دکھایا گیا ہے۔ دونوں شکلوں سے ظاہر ہے کہ دونوں طریقوں سے ایک ہی نتیجہ نکلتا ہے۔ اس طرح دونوں طریقے مساوی ہیں۔

مثال 4.1 کسی دن بارش $35\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ کی چال سے عمودی طور پر نیچے کی جانب آرہی ہے۔ کچھ دیر بعد ہوا $12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ کی چال سے مشرق سے مغرب کی سمت کی طرف چلنے لگتی ہے۔ بس اسٹاپ پر کھڑے کسی لڑکے کو اپنا چھاتا کس سمت میں پکڑنا چاہیے؟

شکل 4.7

جواب بارش اور ہوا کی رفتاروں کو سمتیوں $\mathbf{v}_r$ اور $\mathbf{v}_w$ سے شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔ ان کی سمتیں سوال کے مطابق ظاہر کی گئی ہیں۔ سمتیوں کی جمع کے قانون کے مطابق $\mathbf{v}_r$ اور $\mathbf{v}_w$ کا حاصل **R** شکل میں کھینچا گیا ہے۔ **R** کی قدر ہوگی،

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ ms^{-1} = 37 ms^{-1}$$

عمودی سمت سے R کے ذریعہ بنایا جانے والا زاویہ θ یوں دکھایا جاسکتا ہے:

$$\tan\theta = \frac{V_w}{V_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

یا

$$\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19^o$$

لہٰذا لڑکے کو اپنا چھاتا عمودی مستوی میں عمودی سمت سے 19^o کا زاویہ بناتے ہوئے مشرق کی سمت میں رکھنا چاہیے۔ ▶

4.5 سمتیوں کا جز تجزیہ (RESOLUTION OF VECTORS)

مان لیجیے کہ **a** اور **b** کسی مستوی میں مختلف سمتوں والے دو غیر صفر سمتیے ہیں اور **A** اسی مستوی میں کوئی دیگر سمتیہ ہے (شکل 4.8)۔ تب **A** کو دو سمتیوں کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایک سمتیہ **a** کو کسی حقیقی عدد سے ضرب کرکے اور اسی طرح دوسرے سمتیہ **b** کو کسی دوسرے حقیقی عدد سے ضرب کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کے لیے پہلے **A** کھینچیے جس کی دم O اور چوٹی P ہے۔ پھر O سے **a** کے متوازی ایک خط مستقیم کھینچیے اور P سے ایک خط مستقیم **b** کے متوازی کھینچیے۔ مان لیجیے وہ ایک دوسرے کو Q پر قطع کرتے ہیں۔ تب

$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \qquad (4.6)$$

لیکن چونکہ **a**، **OQ** کے متوازی ہے اور **b**، **QP** کے متوازی ہے اس لیے

$$\mathbf{OQ} = \lambda\, \mathbf{a},\ \mathbf{QP} = \mu\, \mathbf{b} \qquad (4.7)$$

جہاں λ اور μ حقیقی اعداد ہیں۔

لہٰذا، $$\mathbf{A} = \lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b} \qquad (4.8)$$

شکل 4.8 دو غیر خطی سمتیے **a** اور **b** (a) سمتیہ **A** کا **a** اور **b** کی اصطلاحات میں جز تجزیہ

ہم کہہ سکتے ہیں کہ **A** کو **a** اور **b** کی سمت دو اجزا، علی الترتیب سمتیہ λ**a** اور سمتیہ μ **b** میں جز تجزیہ کردیا گیا ہے۔ اس طریقے کا استعمال کرکے ہم کسی سمتیہ کو دو سمتی اجزا میں جز تجزیہ کرسکتے ہیں اس طرح کہ یہ تینوں ایک ہی مستوی میں واقع ہوں۔ اکائی عددی قدر کے سمتیوں کی مدد سے مستطیل نما کارتیزی نظام کے مطابق کسی سمتیہ کا جز تجزیہ آسان ہوتا ہے۔ ایسے سمتیوں کو اکائی سمتیہ (unit vector) کہتے ہیں۔ جس پر اب ہم غور کریں گے۔ اکائی سمتیہ وہ سمتیہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر ایک ہو اور جو کسی خصوصی سمت میں ہو۔ نہ تو اس کے کوئی ابعاد ہوتی ہیں اور نہ ہی کوئی اکائی۔ محض سمت کا تعین کرنے کے لیے اس کا استعمال ہوتا ہے۔ شکل 4.9(a) میں دکھائے گئے ایک مستطیل نما کارتیزی نظام کے x, y اور z محوروں کے موافق اکائی سمتیوں کو ہم علی الترتیب $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ اور $\hat{\mathbf{k}}$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔ کیونکہ یہ سبھی اکائی سمتیہ ہیں، اس لیے

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

یہ اکائی سمتیے ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ دوسرے سمتیوں سے ان کی الگ شناخت کے لیے ہم نے اس کتاب میں موٹے ٹائپ کے اوپر ایک کیپ (^) لگا دیا ہے۔ کیونکہ اس باب میں ہم صرف دو ابعادی حرکت کا مطالعہ کررہے ہیں لہٰذا ہمیں صرف دو اکائی سمتیوں کی ضرورت ہوگی۔ اگر

کسی اکائی سمتیہ $\hat{\mathbf{n}}$ کو ایک عددیہ λ سے ضرب کریں تو حاصل ایک سمتیہ $\lambda\hat{\mathbf{n}} = \lambda$ ہوگا۔ عام طور پر کسی سمتیہ **A** کو درج ذیل سے ظاہر کرسکتے ہیں:

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

جہاں $\hat{\mathbf{n}}$، **A** کی سمت میں ایک اکائی سمتیہ ہے۔

ہم کسی سمتیہ **A** کو دو ایسے جز تجزیوں میں تحلیل کرسکتے ہیں جو $\hat{\mathbf{i}}$ اور $\hat{\mathbf{j}}$ کی سمت میں ہیں۔ مان لیجیے کہ جیسا [شکل (b) 4.9] میں دکھایا گیا ہے، **A** مستوی x-y میں واقع ہے۔ **A** کی چوٹی سے ہم ایسے خطوط کھنچتے ہیں جو کارتیزی محوروں پر عمود ہیں جیسا شکل [4.9(b)] میں دکھایا گیا ہے اس سے ہمیں دو سمتیہ $\mathbf{A}_1$ اور $\mathbf{A}_2$ حاصل ہوتے ہیں اس طرح کہ $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$ چونکہ $\mathbf{A}_1$ اکائی سمتیہ $\hat{\mathbf{i}}$ کے متوازی ہے اور $\mathbf{A}_2$ اکائی سمتیہ $\hat{\mathbf{j}}$ کے متوازی ہے۔

$$\mathbf{A_1} = A_x\,\hat{\mathbf{i}}\ ,\ \mathbf{A_2} = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

یہاں A_x اور A_y حقیقی اعداد ہیں۔

اس طرح
$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.12)$$

اسے [شکل 4.9(c)] میں دکھایا گیا ہے۔ مقداروں A_x اور A_y کو ہم سمتیہ **A** کے x اور y اجزا کہتے ہیں۔ یہاں یہ بات غور کرنے کی ہے کہ خود A_x سمتیہ نہیں ہے لیکن $A_x\hat{\mathbf{i}}$ ایک سمتیہ ہے اسی طرح $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ ایک سمتیہ ہے۔ سادہ ٹرگنومیٹری کا استعمال کرکے A_x اور A_y کو **A** کی عددی قدر اور اس کے ذریعہ x محور کے ساتھ بننے والے زاویہ θ کی اصطلاح میں ظاہر کرسکتے ہیں:

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta \qquad (4.13)$$

مساوات 4.13 سے ظاہر ہے کہ کسی سمتیہ کا جزو، زاویہ θ پر منحصر ہوتا ہے اور وہ مثبت، منفی یا صفر ہوسکتا ہے۔

کسی مستوی میں ایک سمتیہ **A** کو ظاہر کرنے کے لیے اب ہمارے پاس دو طریقے ہیں۔

(i) اس کی عددی قدر A اور اس کے ذریعہ x- محور کے ساتھ بنائے گئے زاویہ θ کے ذریعہ، یا

(ii) اس کے اجزا A_x اور A_y کے ذریعہ

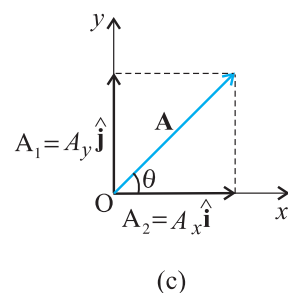
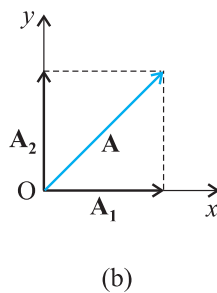
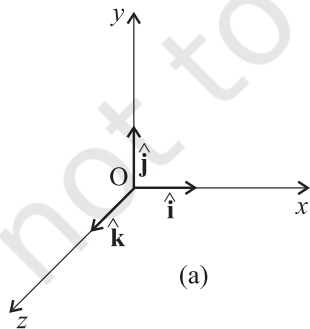
اگر A اور θ ہمیں معلوم ہیں تو A_x اور A_y کی قدریں مساوات (4.13) سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔ اگر A_x اور A_y معلوم ہوں تو A اور θ کی قدر درج ذیل سے معلوم کی جاسکتی ہے :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$

یا

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

اور

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x},\ \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (4.15)$$

شکل 4.9 (a) اکائی سمتیے $\hat{i}$، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$، x، y اور z محوروں پر ھیں (b) ایک سمتیہ A کا، اس کے اجزاء A_1 اور A_2 میں، x اور y محوروں پر، جزتجزیہ کیا گیا ھے۔ (c) $\vec{A}_1$ اور $\vec{A}_2$ کو $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ کی شکل میں ظاہر کیا گیا ھے۔ (d) سمتیہ **A** کا x-y اور z محوروں کے مطابق اجزا میں جزتجزیہ

* اس بات پر غور کیجیے کہ α، β اور γ فضا (space) میں زاویے ھیں۔ یہ ایسے دو خطوط کے جوڑے کے درمیان کے زاویے ھیں جو ہم سطح (coplanar) نہیں ھیں

ابھی تک اس طریقے میں ہم نے ایک x-y مستوی میں کسی سمتیہ کو اس کے اجزا میں جز تجزیہ کیا ہے لیکن اسی طریقے کے ذریعہ کسی سمتیہ **A** کا تین ابعاد میں، x، y اور z محوروں کے مطابق، تین اجزا میں جز تجزیہ کیا جاسکتا ہے۔ اگر **A** اور x, y اور z محوروں کے درمیان* زاویہ علی الترتیب α، β اور γ ہوں [شکل (d) 4.9] تو

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \quad [4.16\ (a)]$$

عمومی شکل میں

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.16b)$$

سمتیہ **A** کی عددی قدر

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4.16c)$$

ہوگی۔

ایک مقام سمتیہ (position vector) **r** کو درج ذیل طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.17)$$

یہاں x, y اور z سمتیہ **r** کے محوروں x-، y-، z- پر اجزا ہیں۔

4.6 سمتیہ جمع: تجزیاتی طریقہ (VECTOR ADDITION : ANALYTICAL METHOD)

اگرچہ سمتیوں کو جوڑنے کا گرافی طریقہ ہمیں سمتیوں اور ان کے حاصل سمتیہ کو واضح طور پر سمجھنے میں مددگار ہوتا ہے، کبھی کبھی یہ طریقہ پیچیدہ ہوتا ہے اور اس کی صحت و درستی بھی محدود ہوتی ہے۔ سمتیوں کو ان کے متطابق اجزا کو ملا کر جوڑنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ مان لیجیے کہ کسی مستوی x-y میں دو سمتیہ **A** اور **B** ہیں جن کے اجزا A_x, A_y اور B_x اور B_y ہیں تو

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

مان لیجیے کہ **R** ان کا حاصل جمع ہے، تو

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) \quad (4.19a)$$

کیونکہ سمتیہ تقلیبی اور اتصالی قوانین کی تعمیل کرتے ہیں، اس لیے مساوات (4.19) میں ظاہر کیے گئے سمتیوں کو درج ذیل طور پر از سرِ نو مرتب کر سکتے ہیں:

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \quad (4.19b)$$

کیونکہ

$$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.20)$$

اس لیے

$$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y \quad (4.21)$$

اس طرح حاصل سمتیہ **R** کا ہر ایک جزو سمتیوں **A** اور **B** کے متطابق اجزا کی جمع کے برابر ہوتا ہے۔

تین ابعاد (dimensions) میں، ہمارے پاس ہے:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}+\mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

اور

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z \quad (4.22)$$

اس طریقہ کو سمتیوں کی کسی بھی تعداد کو جوڑنے اور نفی کرنے کے لیے استعمال میں لا سکتے ہیں۔ مثال کے لیے، اگر **a, b** اور **c** تینوں سمتیے درج ذیل طرح سے دیئے گئے ہوں:

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.23a)$$

تو سمتیہ $\mathbf{T} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ کے اجزا درج ذیل ہوں گے:

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$

$$T_y = a_y + b_y - c_y$$

$$T_z = a_z + b_z - c_z \quad (4.23b)$$

$SN = B \sin \theta$

$OS^2 = (A+B \cos \theta)^2 + (B \sin \theta)^2$

یا $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \qquad (4.24a)$$

مثلث OSN میں،

$SN = OS \sin \alpha = R \sin \alpha$

اور مثلث PSN میں،

$SN = PS \sin \theta = B \sin \theta$

اس لیے، $R \sin \alpha = B \sin \theta$

یا

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24b)$$

اسی طرح $PM = A \sin \alpha = B \sin \beta$

یا

$$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24c)$$

مساوات (4.24b) اور (4.24c) کے اتحاد سے ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{A}{\sin \beta} = \frac{B}{\sin \alpha} \qquad (4.24d)$$

مساوات (4.24d) استعمال کرتے ہوئے، ہم حاصل کرتے ہیں،

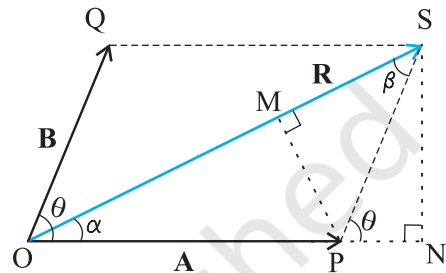
$$\sin \alpha = \frac{B}{R} \sin \theta \qquad (4.24e)$$

یہاں R کی قدر مساوات (4.24a) میں دی گئی ہے۔

یا $$\tan \alpha = \frac{SN}{OP+PN} = \frac{B \sin\theta}{A+B\cos\theta} \qquad (4.24f)$$

مساوات (4.24a) سے حاصل R کی عددی قدر اور مساوات (4.24e) سے اس کی سمت معلوم کی جاسکتی ہے۔ مساوات (4.24a) **کو کوسائن کا قانون** (Law of cosines) کے طور پر جانا جاتا ہے اور مساوات (4.24 d) کو سائن کا قانون (Law of sines) کہا جاتا ہے۔

مثال 4.3 ایک موٹر بوٹ شمال کی جانب 25 km/h کی رفتار سے متحرک ہے اور اس خطے میں پانی کی دھارا کی رفتار 10 km/h ہے۔ پانی کی دھارا کی سمت جنوب سے مشرق کی طرف 60° پر ہے۔ موٹر بوٹ کی حاصل رفتار دریافت کیجیے۔

مثال 4.2 شکل 4.10 میں دکھائے گئے دو سمتیوں **A** اور **B** کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔ ان کے حاصل سمتیہ کی عددی قدر اور سمت ان کی عددی قدروں اور θ کی اصطلاحات میں نکالیے۔

شکل **4.10**

جواب شکل 4.10 کے مطابق مان لیجیے کہ **OP** اور **OQ** دو سمتیوں **A** اور **B** کو ظاہر کرتے ہیں، جن کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔ تب سمتیہ جمع کے متوازی الاضلاع کے قانون کے ذریعہ ہمیں حاصل سمتیہ **R** حاصل ہوگا جسے شکل میں **OS** کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔

اس طرح $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

شکل میں OP، SN پر عمود ہے اور PM، OS پر عمود ہے۔

$OS^2 = ON^2 + SN^2$

لیکن $ON = OP + PN = A + B \cos \theta$

شکل **4.11**

جواب شکل 4.11 میں سمتیہ $\mathbf{v_b}$ موٹر بوٹ کی رفتار کو اور $\mathbf{v_c}$ پانی کی دھارا کی رفتار کو ظاہر کرتے ہیں۔ سوال کے مطابق شکل میں ان کی سمتیں دکھائی گئی ہیں۔ سمتیہ جمع کے متوازی الاضلاع طریقہ کے مطابق حاصل $\mathbf{R}$ کی سمت شکل میں دکھائی گئی ہے۔ کوسائن قانون کا استعمال کرکے ہم $\mathbf{R}$ کی عددی قدر نکال سکتے ہیں۔

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10(-1/2)} \cong 21.8 \text{ km/h}$$

$\mathbf{R}$ کی سمت معلوم کرنے کے لیے ہم سائن قانون کا استعمال کرتے ہیں۔

یعنی

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \quad \text{یا} \quad \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^\circ}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$$\phi \cong 23.4^\circ$$

4.7 ایک مستوی میں حرکت (MOTION IN A PLANE)

اس حصّہ میں ہم یہ دیکھیں گے کہ سمتیہ کے استعمال سے دو ابعاد میں حرکت کو کس طرح بیان کیا جاتا ہے۔

4.7.1 مقام سمتیہ اور نقل (Position Vector and Displacement)

کسی مستوی میں واقع ذرے P کا، x-y حوالہ جاتی فریم کے مبدے کے مطابق مقام سمتیہ r [شکل 4.12] درج ذیل مساوات سے ظاہر کرتے ہیں :

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

یہاں x اور y، x اور y محوروں کے مطابق r کے اجزا ہیں۔ انہیں ہم شے کے کوآرڈی نیٹس بھی کہہ سکتے ہیں۔

شکل **4.12** (a) ایک ذرّے کے مقام سمتیہ $\mathbf{r}$ (b) نقل $\Delta\mathbf{r}$ اور اوسط رفتار $\mathbf{v}$

مان لیجیے کہ ایک ذرّہ شکل 4.12 میں موٹے خط سے ظاہر کیے گئے منحنی پر حرکت کرتا ہے۔ کسی وقت t پر اس کا مقام P ہے اور دوسرے وقت t' پر اس کا مقام p' ہے۔ ذرے کے نقل کو ہم درج ذیل طور پر لکھیں گے :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

جو P سے P′ کی سمت میں ہے۔

مساوات 4.25 کو ہم سمتیوں کے اجزا کی شکل میں درج ذیل طور پر ظاہر کر سکتے ہیں :

$$\Delta\mathbf{r} = (x'\hat{\mathbf{j}} + y'\hat{\mathbf{j}}) - (x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}})$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

جہاں،

$$\Delta x = x' - x,\ \Delta y = y' - y \qquad (4.26)$$

رفتار (Velocity)

شے کے نقل اور اس کے متطابق وقفہ وقت کی نسبت کو ہم اوسط رفتار (average speed $\bar{\mathbf{v}}$) کہتے ہیں، لہٰذا:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

یا

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \bar{v}_y\,\hat{\mathbf{j}}$$

چونکہ $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$، اوسط رفتار کی سمت وہی ہوگی، جو $\Delta \mathbf{r}$ کی ہے۔

(شکل 4.12) متحرک شے کی رفتار (ساعتی رفتار) اوسط رفتار کی انتہائی قدر (limiting value) جبکہ وقفہ وقت صفر کے نزدیک تر ہو، سے دی جاتی ہے۔

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

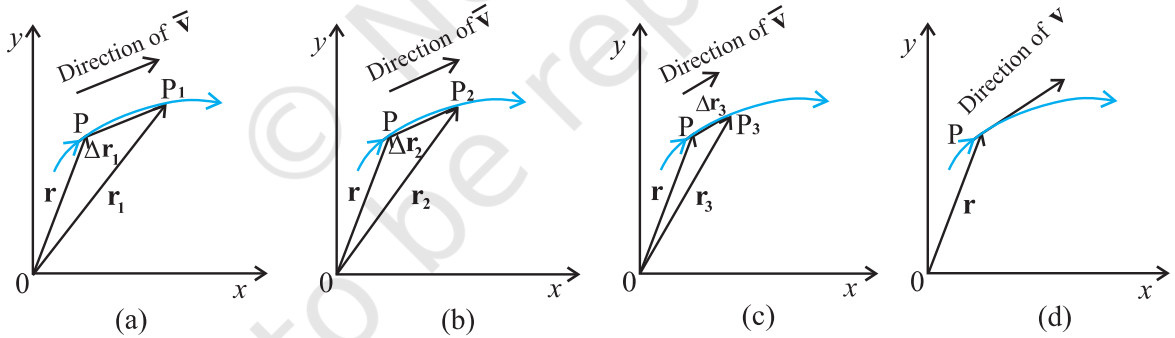
Δt کی تنزلی قدروں یعنی Δt_1، Δt_2 اور Δt_3 کے لیے ذرّہ کی اوسط رفتار $\bar{\mathbf{v}}$ کی سمت کو دکھایا گیا ہے۔ یعنی $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ جیسے ہی $\Delta t \to 0$، $\Delta \mathbf{r} \to 0$ اوسط رفتار کی سمت راہ کے مماس (tangent) کی سمت ہوجاتی ہے [شکل (4.13(d)]۔ راہ کے کسی بھی نقطے پر، ایک شے کی رفتار کی سمت، اس نقطہ پر، راستہ پر مماسی ہوتی ہے اور حرکت کی سمت میں ہوتی ہے۔

ہم اجزاء کی شکل میں $\vec{v}$ کو لکھ سکتے ہیں :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$$

شکل 4.13 جیسے جیسے وقفہ وقت Δt، صفر کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، اوسط رفتار، رفتار $\vec{v}$ کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ $\vec{v}$ کی سمت اس خط کے متوازی ہے جو راستہ پر مماس ہے۔

شکل (4.13(a) تا (4.13(d) کی مدد سے اس انتہائی قدر کو معلوم کرنے کے عمل کو آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے۔ ان شکلوں میں موٹا خط اس شے کے ذریعے اختیار کی گئی راہ کو ظاہر کرتا ہے جو وقت t پر نقطہ P پر ہے۔ اس شے کے مقامات، $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ وقتوں کے بعد علی الترتیب، P_1, P_2, P_3 سے ظاہر ہوتے ہیں۔ ان وقتوں میں ذرے کا نقل علی الترتیب $\Delta \mathbf{r}_1, \Delta \mathbf{r}_2, \Delta \mathbf{r}_3$ ہے۔ شکلوں (a), (b), (c) میں، علی الترتیب،

جہاں،

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt} \qquad (4.30\ a)$$

لہٰذا اگر وقت کے تفاعل کے طور پر ہمیں کوآرڈی نیٹس (coordinaters) x اور y کی ریاضیاتی عبارتیں معلوم ہیں تو ہم درج بالا مساواتوں کا استعمال v_x اور v_y نکالنے میں کر سکتے ہیں۔

سمتیہ $\mathbf{v}$ کی عددی قدر درج ذیل ہوگی،

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4.30\text{ b})$$

اور **v** کی سمت زاویہ θ کے ذریعہ درج ذیل طور پر ظاہر ہوگی:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad (4.30\text{ c})$$

ایک رفتار سمتیہ v کے لیے، v_x، v_y اور θ شکل 4.14 میں دکھائے گئے ہیں۔

شکل 4.14 رفتار **v** کے جزو v_x، v_y اور زاویہ θ جو یہ x محور سے بناتا ہے۔نوٹ کریں کہ $v_x = v\cos\theta$، $v_y = v\sin\theta$

اسراع (Acceleration) x-y مستوی میں متحرک شے کا اوسط اسراع **a** اس کی رفتار میں تبدیلی اور اس کے مطابق وقفہ وقت Δt کے تناسب کے برابر ہوتا ہے۔

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.31\text{a})$$

یا،

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.31\text{b})$$

اسراع (لمحاتی اسراع) اوسط اسراع کی وہ انتہائی قدر ہے جو وقفہ وقت کو صفر کے نزدیک تر کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (4.32\text{ a})$$

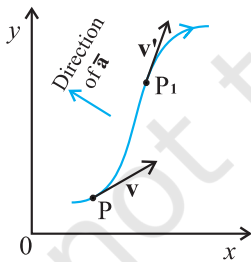
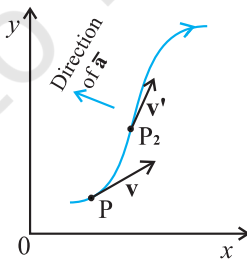
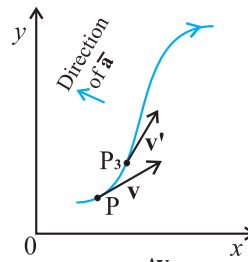
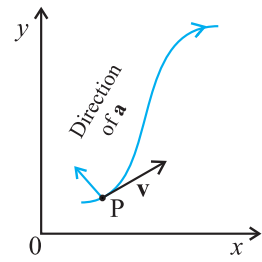
چونکہ $\Delta v = \Delta v_x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta v_y\,\hat{\mathbf{j}}$ ہمارے پاس

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.32\text{ b})$$

جہاں،

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad (4.32\text{ c})\ *$$

رفتار کی طرح یہاں بھی شے کی حرکت کے راستے کو ظاہر کرنے والے گراف کے ذریعے، اسراع کی تعریف کے لیے ہم گرافی طریقے سے انتہائی قدر حاصل کرنے کے عمل کو سمجھ سکتے ہیں۔ اسے شکلوں 4.15(a) تا 4.15 (d) میں دکھایا گیا ہے۔ کسی وقت t پر ذرے کے مقام کو

شکل 4.15 تین وقفہ وقت (a) Δt_1، (b) Δt_2، (c) Δt_3، $(\Delta_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ کے لیے اوسط اسراع (d) $\Delta t \to 0$ حد کے تحت اوسط اسراع شے کا اسراع ہوجاتا ہے۔

* x اور y کے معاملے میں، a_x اور a_y کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ $a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$

نقطہ P کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔ $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ وقت کے بعد ذرے کے مقام علی الترتیب نقاط P_1، P_2، P_3 کے ذریعہ ظاہر کیے گئے ہیں۔ شکلوں (4.15) b,a اور c میں ان سبھی نقاط، P، P_1، P_2، P_3 پر رفتار سمتیوں کو بھی دکھایا گیا ہے۔ ہر ایک Δt کے لیے سمتیے جمع کے مثلث قانون کا استعمال کر کے $\Delta\mathbf{v}$ حاصل کی گئی ہے تعریف کے مطابق، اوسط اسراع کی سمت وہی ہے جو $\Delta\vec{v}$ کی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے Δt کی قدر گھٹتی جاتی ہے ویسے ویسے $\Delta\mathbf{v}$ کی سمت بھی بدلتی جاتی ہے اور اس کے نتیجے میں اسراع کی بھی سمت بدلتی ہے۔ آخر کار $\Delta t \to 0$ حد میں [شکل (d) 4.15] اوسط اسراع، ساعتی اسراع ہوجاتا ہے اور اس کی سمت دکھائی گئی شکل کے مطابق ہوتی ہے۔

غور کریں کہ ایک بُعد میں شے کی رفتار اور اسراع ہمیشہ ایک ہی خطِ مستقیم پر ہوتے ہیں (وہ یا تو ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں یا مخالف سمت میں) لیکن دو یا تین ابعاد میں حرکت کے لیے رفتار اور اسراع سمتیوں کے درمیان 0^0 سے 180^0 کے درمیان کوئی بھی زاویہ ہوسکتا ہے۔

مثال 4.4 کسی ذرے کا مقام $\mathbf{r} = 3.0t\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}$ ہے جہاں t سکینڈ میں ظاہر کیا گیا ہے۔ دیگر ضربیوں کی اکائی اس طرح ہیں کہ $\mathbf{r}$ میٹر میں ظاہر ہو۔ (a) ذرے کا $\mathbf{v}(t)$ اور $\mathbf{a}(t)$ معلوم کیجیے (b) $t = 1$ s پر $\mathbf{v}(t)$ کی عددی قدر اور سمت معلوم کیجیے

جواب

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3.0\,t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = +4.0\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0$ m s^{-2} (y کی سمت میں)

$t = 1.0$ s, پر

$$\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$$

اس کی قدر ہے،
$$v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$$

اس کی سمت ہے،

x-محور کے ساتھ
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$$

4.8 کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت (MOTION IN A PLANE WITH CONSTANT ACCELERATION)

مان لیجیے کہ کوئی شے ایک مستوی x-y میں حرکت کر رہی ہے اور اس کے اسراع یعنی $\mathbf{a}$ کی قدر مستقلہ ہے۔ کسی وقفہ وقت میں اوسط اسراع اس مستقل اسراع کے برابر ہوگا۔ مان لیجیے کسی وقت $t = 0$ پر شے کی رفتار $\mathbf{v}_0$ اور وقت t پر اس کی رفتار $\mathbf{v}$ ہے۔

تب تعریف کے مطابق،

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t}$$

یا

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}t \qquad (4.32\ a)$$

درج بالا مساوات کو سمتیوں کے اجزاء کی شکل میں درج ذیل طور پر ظاہر کرتے ہیں:

$$v_x = v_{ox} + a_x t$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t \qquad (4.33\ b)$$

اب ہم دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ مقام سمتیہ $\mathbf{r}$ کس طرح بدلتا ہے۔ یہاں یک بُعدی رفتار کے لیے بتائے گئے طریقے کا استعمال کریں گے۔ مان لیجیے کہ 0 اور t وقت پر ذرّے کے مقام سمتیے $\vec{r}_0$ اور $\vec{r}$ ہیں اور ان ساعتوں پر ذرے کی رفتار $\mathbf{v}_0$ اور $\mathbf{v}$ ہیں تب وقفہ وقت t-0=t کے

دوران ذرے کی اوسط رفتار $\frac{v+v_0}{2}$ ہوگی۔ نقل $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ ہوگا۔ کیونکہ نقل اوسط رفتار اور وقفہ وقت کا ضربیہ ہوتا ہے:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r_0}=\left(\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v_0}}{2}\right)t=\left(\frac{(\mathbf{v_0}+\mathbf{a}t)+\mathbf{v_0}}{2}\right)t$$

$$=\mathbf{v_0}t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

یا

$$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{v_0}t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad (4.34\text{ a})$$

یہ بات آسانی سے ثابت کی جاسکتی ہے کہ مساوات (4.34a) کا مشتق (derivative) یعنی $d\mathbf{r}/dt$ مساوات (4.33a) دیتا ہے اور ساتھ ہی t=0 وقت پر $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ کی شرط کو بھی پورا کرتا ہے۔ مساوات (4.34a) کو اجزا کی شکل میں درج ذیل طور پر ظاہر کرسکتے ہیں:

$$x=x_0+v_{ox}t+\frac{1}{2}a_xt^2$$

$$y=y_0+v_{oy}t+\frac{1}{2}a_yt^2 \qquad (4.34\text{ b})$$

(4.34b) کی ایک فوری تشریح یہ ہے کہ x اور y سمتوں میں حرکات ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہوتی ہیں۔ **یعنی کسی مستوی (دوابعاد) میں حرکت کو دو الگ الگ ہم وقتی یک بُعدی مستقلہ اسراعی حرکتوں، جو باہمی عمودی سمتوں میں ہوں، کے طور پر سمجھ سکتے ہیں۔** یہ ایک اہم نتیجہ ہے جو دوابعاد میں شے کی حرکت کے تجزیے میں کارگر ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ تین ابعادی حرکت کے لیے بھی ہے۔ بہت سے طبیعی حالات میں دوعمودی سمتوں کا انتخاب آسان ہوتا ہے جیسا کہ پروجکٹائل حرکت کے لیے حصہ (4.10) میں دیکھیں گے۔

مثال 4.5 وقت t=0 پر کوئی ذرہ مبدا سے $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے۔ x-y مستوی میں اس پر ایک ایسی قوت لگتی ہے جو اس میں مستقل اسراع $(3.0\hat{\mathbf{i}}+2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s² پیدا کرتا ہے۔ (a) جس وقت پر ذرے کا x کوآرڈی نیٹ 8.4m ہوا اس ساعت پر اس کا y کوآرڈی نیٹ کیا ہوگا؟ (b) اس ساعت پر ذرے کی چال کیا ہوگی؟

جواب مساوات (4.34a) سے $r_0=0$ کے لئے ذرے کا مقام دیا جاتا ہے:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{v_0}t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$=5.0\hat{\mathbf{i}}t+(1/2)(3.0\hat{\mathbf{i}}+2.0\hat{\mathbf{j}})\,t^2$$

$$=(5.0t+1.5t^2)\hat{\mathbf{i}}+1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

اس لیے، $x(t)=5.0t+1.5t^2$

$$y(t)=+1.0t^2$$

دیا ہے $x(t)=84$ m، تب $t=?$

$$5.0\,t+1.5t^2=84\Rightarrow t=6\text{ s}$$

$t=6.0$ s پر $y=1.0\,(6)^2=36.0$ m

اب رفتار کے لیے، $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(5.0+3.0t)\hat{\mathbf{i}}+2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$

$t=6$s پر، $\mathbf{v}=23.0\hat{\mathbf{i}}+12.0\hat{\mathbf{j}}$

اور چال، $=|\mathbf{v}|=\sqrt{23^2+12^2}\cong 26\text{ m s}^{-1}$

4.9 دوابعاد میں نسبتی رفتار (RELATIVE VELOCITY IN TWO DIMENSIONS)

حصہ 3.7 میں کسی خط مستقیم پر حرکت کے لیے جس نسبتی رفتار کے تصور سے ہم متعارف ہوئے ہیں، اس کی کسی مستوی میں یا سہ ابعادی حرکت کے لیے آسانی سے توسیع کر سکتے ہیں۔ مانا کہ دو اشیا A اور B رفتاروں $\mathbf{v}_A$ اور $\mathbf{v}_B$ سے متحرک ہیں (ہر ایک حرکت کسی مشترک حوالہ جاتی فریم جیسے زمین کے لحاظ سے)۔ لہٰذا شے A کی **B کی رفتار کی نسبت سے:**

$$\mathbf{v}_{AB}=\mathbf{v}_A-\mathbf{v}_B \qquad (4.35a)$$

اسی طرح شے A کی نسبت سے شے B کی رفتار درج ذیل ہوگی:

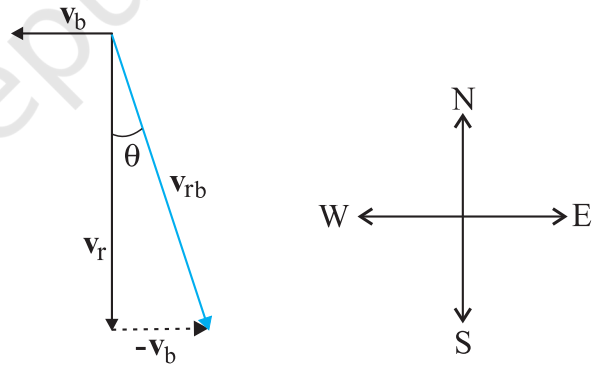
$$\mathbf{v}_{BA}=\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A$$

اس لیے، $\mathbf{v}_{AB}=-\mathbf{v}_{BA}$

اور، $|\mathbf{v}_{AB}|=|\mathbf{v}_{BA}|$

مثال 4.6 عمودی طور پر $35\ m\ s^{-1}$ کی چال سے بارش ہو رہی ہے۔ کوئی خاتون مشرق سے مغرب سمت میں $12\ m\ s^{-1}$ کی چال سے سائیکل چلا رہی ہیں۔ بارش سے بچنے کے لیے انھیں چھاتا کس سمت میں لگانا چاہیے؟

جواب شکل 4.16 میں بارش کی رفتار کو $\mathbf{v}_r$ اور خاتون کے ذریعہ چلائی جا رہی سائیکل کی رفتار کو $\mathbf{v}_b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ دونوں رفتاریں زمین کی نسبت سے ہیں۔ چونکہ خاتون سائیکل چلا رہی ہے، اس لیے بارش کی جس رفتار کا انھیں احساس ہوگا وہ سائیکل کی رفتار کی نسبت بارش کی رفتار ہوگی۔ یعنی،

$$\mathbf{v}_{rb} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_b$$

شکل **4.16**

یہ نسبتی رفتار سمتیہ انتصاب (vertical) کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے، جیسا شکل 4.16 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ دیا جاتا ہے:

$$\tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

یا، $$\theta \cong 19^\circ$$

لٰہذا خاتون کو اپنا چھاتا انتصاب سے 19^0 کا زاویہ بناتے ہوئے مغرب کی طرف رکھنا چاہیے۔

آپ اس سوال اور مثال 4.1 کے فرق پر غور کیجیے۔ مثال 4.1 میں لڑکے کو دو رفتاروں کے حاصل (سمتیہ جمع) کا احساس ہوتا ہے جب کہ اس مثال میں خاتون کو سائیکل کی نسبت بارش کی رفتار (دونوں رفتاروں کے سمتیہ فرق) کا احساس ہوتا ہے۔

4.10 پروجکٹائل حرکت (PROJECTILE MOTION)

اس سے پہلے حصہ میں ہم نے جن تصورات کو فروغ دیا ہے ان کے اطلاق کے طور پر ہم پروجکٹائل کی حرکت کا مطالعہ کریں گے۔ جب کوئی شے اچھالنے کے بعد اڑان میں ہی ہو تو اسے پروجکٹائل کہتے ہیں۔ ایسا پروجکٹائل فٹ بال، کرکٹ کی گیند، بیس بال یا دیگر کوئی بھی شے ہو سکتی ہے۔ کسی پروجکٹائل کی حرکت کو دو الگ الگ ہم وقتی حرکتوں کے اجزاء کا نتیجہ سمجھا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک جزو بغیر کسی اسراع کے افقی سمت میں ہوتا ہے اور دوسرا جز انتصابی سمت میں ہوتا ہے، جس پر کششِ زمین کے سبب مستقلہ اسراع کام کر رہا ہوتا ہے۔ سب سے پہلے گیلیلو نے اپنی تحریر **ڈائیلاگ آن دی گریٹ ورلڈ سسٹم** (1632) میں پروجکٹائل حرکت کے افقی اور عمودی اجزا کی ایک دوسرے سے بےتعلقی یا آزادی کا ذکر کیا تھا۔

اس مطالعہ میں ہم یہ مانیں گے کہ پروجکٹائل کی حرکت پر ہوا کی مزاحمت ناقابلِ لحاظ اثر ڈالتی ہے۔ مانا کہ پروجکٹائل کو ایسی سمت میں $\mathbf{v}_0$ رفتار سے پھینکا گیا ہے جو x-محور سے (شکل 4.17 کے مطابق) θ_0 زاویہ بناتی ہے۔

$$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

یعنی،

$$a_x = 0,\ a_y = -g \qquad (4.36)$$

ابتدائی رفتار $\mathbf{v}_0$ کے اجزاء درج ذیل ہوں گے:

$$\mathbf{v}_{0x} = \mathbf{v}_0 \cos\theta_0$$

$$\mathbf{v}_{0y} = \mathbf{v}_0 \sin\theta_0 \qquad (4.37)$$

شکل **4.17** ایسی شے کی حرکت جسے زاویہ θ_0 پر، رفتار $\vec{v}_0$ کے ساتھ پھینکا (اچھالا) گیا ھے۔

اگر شکل 4.17 کے مطابق شے کا ابتدائی مقام حوالہ جاتی فریم کے مبدا پر ہو، تو

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

اس طرح مساوات (4.34b) درج ذیل طور پر لکھیں گے:

$$x = v_{0x}\, t = (v_0 \cos \theta_0)\, t$$

اور

$$y = (v_0 \sin \theta_0)\, t - (½)g\, t^2 \qquad (4.38)$$

کسی وقت t پر رفتار کے اجزا، مساوات (4.33b) کو استعمال کرکے حاصل کیے جاسکتے ہیں:

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$

$$v_y = v_o \sin \theta_o - g\, t \qquad (4.39)$$

مساوات (4.38) سے ہمیں کسی ساعت t پر پروجکٹائل کے x- اور y- کوآرڈی نیٹ دو پیرامیٹروں –ابتدائی رفتار v_0 اور ظل زاویہ (projection angle) کی شکل میں حاصل ہوجائیں گے۔اس بات پر غور کیجیے کہ x اور y سمتوں کے باہم عمودی ہونے کے انتخاب سے پروجکٹائل حرکت کے تجزیہ میں کافی آسانی ہوگئی ہے۔ رفتار کے دو اجزا میں سے ایک، x- جزو، حرکت کی پوری مدت میں مستقل رہتا ہے جب کہ دوسرا، y- جز، اس طرح تبدیل ہوتا ہے جیسے کہ کوئی شے انتصابی سمت میں آزادی سے نیچے گر رہی ہو۔شکل 4.18 میں مختلف ساعتوں کے لیے اسے گرافی طریقہ سے دکھایا گیا ہے۔ غور کیجیے کہ اعظم اونچائی (maximum height) والے نقطے کے لیے:

$v_y = 0$ اور

$$\theta = \tan^{-1} v_y / v_x = 0$$

پروجکٹائل کی راہ کی مساوات

(Equation of path of a projectile)

پروجکٹائل کے ذریعہ طے کردہ راہ کی شکل کیا ہوتی ہے؟ اس کے لیے ہمیں راہ کی مساوات نکالنی ہوگی۔ مساوات (4.38) میں دی گئی x اور y عبارتوں سے t کو معدوم کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$y = (\tan \theta_o)\, x - \frac{g}{2\,(v_o \cos\theta_o)^2}\, x^2 \qquad (4.40)$$

چونکہ θ_0، g اور v_0 مستقلے ہیں، مساوات (4.40) کو درج ذیل طور پر ظاہر کر سکتے ہیں: $y = a\,x + b x^2$ اس میں a اور b مستقلے ہیں۔ یہ ایک پیرابولا (مکاف) کی مساوات ہے یعنی پروجکٹائل کی راہ مکافی ہوتی ہے۔ (شکل 4.18)

شکل 4.18 پروجکٹائل کی راہ مکافی (پیرابولا) ہوتی ہے۔

اعظم اونچائی کا وقت
(Time of maximum height)

پروجکٹائل اعظم اونچائی تک پہنچنے کے لیے کتنا وقت لیتا ہے؟ مان لیجیے کہ یہ وقت t_m ہے۔ چونکہ اس نقطے پر $v_y = 0$ اس لیے مساوات (4.39) سے ہم t_m کی قدر نکال سکتے ہیں :

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - g\,t_m = 0$$

یا

$$t_m = v_0 \sin\theta_0 / g \qquad (4.41a)$$

پروجکٹائل کی اڑان کی مدت میں لگا کل وقت T_f ہم مساوات (4.38) میں $y = 0$ رکھ کر نکال سکتے ہیں۔ اس لیے

$$T_f = 2\,(v_0 \sin\theta_0)/g \qquad (4.41b)$$

T_f کو پروجکٹائل کا **اڑان وقت** **(time of flight)** کہتے ہیں۔ غور کرنے کی بات ہے کہ $T_f = 2t_m$۔ مکافی راہ کے تشاکل (symmetry) سے ایسے ہی نتیجے کی توقع کی جاتی ہے۔

پروجکٹائل کی اعظم اونچائی
(Maximum height of a projectile)

مساوات (4.38) میں $t = t_m$ رکھ کر پروجکٹائل کے ذریعہ حاصل اعظم ترین اونچائی h_m کا حساب لگایا جاسکتا ہے :

$$y = h_m = \left(v_0 \sin\theta_0\right)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

یا

$$h_m = \frac{\left(v_0 \sin\theta_0\right)^2}{2g} \qquad (4.42)$$

پروجکٹائل کی افقی سِعت
(Horizontal range of a Projectile)

ابتدائی مقام $(x = y = 0)$ سے چل کر اس مقام تک جب $y = 0$ ہو پروجکٹائل کے ذریعہ چلی گئی دوری کو **افقی سِعت** **(horizontal range, R)** کہتے ہیں۔ افقی سِعت اڑان مدت T_f میں چلی گئی دوری ہے اس لیے رینج R ہوگی :

$$R = (v_0 \cos\theta_0)\,(T_f)$$

$$= (v_0 \cos\theta_0)\,(2\,v_0 \sin\theta_0)/g$$

یا

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (4.43\ a)$$

مساوات (4.43 a) سے ظاہر ہوتا ہے کہ ایک دی ہوئی ظلّی رفتار v_0 (projection velocity) کے لیے، R کی قدر اس وقت اعظم (maximum) ہوگی، جب $\sin 2\theta_0$ کی قدر اعظم ہو، یعنی کہ جب: $\theta = 45$

مثال 4.7 گیلیلیو نے اپنی کتاب ٹو نیو سائنسیز (two new sciences) میں کہا ہے کہ ''ان ارتفاعات کے لیے جن کی قدر 45^0 سے برابر مقداروں میں کم یا زیادہ ہوتی ہے سعتیں (ranges) برابر ہوتی ہیں''۔ اس بیان کو ثابت کیجیے۔

جواب اگر کوئی پروجکٹائل θ_0 زاویہ پر ابتدائی رفتار v_0 سے پھینکا جائے، تو اس کی سعت ہوگی:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

اب زاویوں $(45^0 + \alpha)$ اور $(45^0 - \alpha)$ کے لیے $2\theta_0$ کی قدر علی الترتیب $(90^0 + 2\alpha)$ اور $(90^0 - 2\alpha)$ ہوگی۔ $\sin(90^0 + 2\alpha)$ اور $\sin(90^0 - 2\alpha)$ دونوں کی قدر یکساں یعنی $\cos 2\alpha$ ہوتی ہے۔ لہٰذا ان ارتفاعات کے لیے جن کی قدر 45^0 سے برابر مقدار میں کم یا زیادہ ہے، افقی سعتیں برابر ہوتی ہیں۔

مثال 4.8 ایک کوہ پیما (hiker) کسی کھڑی چٹان کے کونے پر کھڑا ہے۔ چٹان زمین سے 490 m اونچی ہے۔ وہ ایک پتھر کو افقی سمت میں 15 m s^{-1} کی ابتدائی چال سے پھینکتا ہے۔ ہوائی مزاحمت نظر انداز کرتے ہوئے یہ معلوم کیجیے کہ پتھر کو زمین تک پہنچنے میں کتنا وقت لگا اور زمین سے ٹکراتے وقت اس کی چال کتنی تھی؟

جواب ہم کھڑی چٹان کے کونے کو x- اور y- محور کے بنیادی نقطے اور پتھر پھینکے جانے کے وقت کو $t = 0$ مانیں گے۔ x- محور کی مثبت سمت ابتدائی رفتار کی طرف اور y- محور کی مثبت سمت عمودی اوپر کی جانب منتخب کرتے ہیں۔ جیسا کہ ہم پہلے کہہ چکے ہیں کہ حرکت کے x- اور y- اجزا ایک دوسرے کے تابع نہیں ہیں، اس لیے

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\, t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\, t + (1/2)\, g\, t^2$$

یہاں $x_0 = y_0 = 0,\ v_{0y} = 0,\ a_y = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2},$

$$v_{0x} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

پتھر اس وقت زمین سے ٹکراتا ہے جب $y(t) = -490$ m ہے۔

$$-490 \text{ m} = -(1/2)\,(9.8)\,t^2$$

یعنی

$$t = 10 \text{ s}$$

رفتار کے اجزا $v_x = v_{0x}$ اور $v_y = v_{0y} - g\,t$ ہوں گے۔

لہٰذا، جب پتھر زمین سے ٹکراتا ہے، تب

$$v_{0x} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_{0y} = 0 - 9.8 \times 10 = -98 \text{ m s}^{-1}$$

اس لیے پتھر کی چال ہوگی

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99.1 \text{ m s}^{-1}$$

مثال 4.9 افقی طور پر اوپر کی جانب 30^0 کا زاویہ بناتے ہوئے ایک کرکٹ گیند 28 m s^{-1} کی چال سے پھینکی جاتی ہے۔ (a) زیادہ سے زیادہ اونچائی کا حساب لگائیے، (b) اسی سطح پر واپس پہنچنے میں لگے وقت کا حساب لگائیے، اور (c) پھینکنے والے نقطے سے اس نقطے کی دوری جہاں گیند اسی سطح پر پہنچی ہے، کی تحسیب کیجیے۔

جواب (a) اعظم اونچائی

$$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_o)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30^\circ)^2}{2\ (9.8)} \text{ m}$$

$$= \frac{14 \times 14}{2 \times 9.8} = 10.0 \text{ m}$$

(b)اسی سطح پر واپس آنے میں لگا وقت

$$T_f = (2\, v_o \sin\theta_o)/g = (2 \times 28 \times \sin 30^\circ)/9.8$$

$$= 28/9.8 \text{ s} = 2.9 \text{ s}$$

(c) پھینکنے والے نقطے سے اس نقطے کی دوری جہاں گیند اسی سطح پر پہنچتی ہے،

$$R = \frac{(v_o^2 \sin 2\theta_o)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^\circ}{9.8} = 69 \text{ m}$$

فضائی مزاحمت کو نظرانداز کرنا۔مفروضے کی حقیقت کیا ہے؟

ہوا کی مزاحمت کو نظرانداز کرنا۔اس مفروضہ کے معنی دراصل کیا ہیں؟ پروجکٹائل حرکت کا مطالعہ کرنے کے دوران ہم نے یہ فرض کرلیا تھا کہ ہوا کی مزاحمت، پروجکٹائل حرکت پر اثر انداز نہیں ہوتی۔ہمیں یہ سمجھنا چاہیے کہ اس بیان (مفروضہ) کا دراصل مطلب کیا ہے۔رگڑ، مزوجت (viscosity) کی قوت' ہوا کی مزاحمت، یہ سب اسرافی قوتیں (Dissipative) ہیں۔ان،حرکت کی مخالفت کرنے والی، قوتوں میں سے کسی بھی قوت کی موجودگی میں، شے کی شروعاتی توانائی، اور نتیجتاً شروعاتی معیارِ حرکت، کا کچھ حصّہ ضائع ہوجاتا ہے۔اس لیے ایک پروجکٹائل، جس کا راستہ مکافی ہوتا ہے، وہ بھی ہوا کی مزاحمت کی موجودگی میں اپنے اس مثالی راستے سے کچھ نہ کچھ یقینی طور پر منحرف ہوجائے گا۔زمین سے واپس ٹکراتے وقت اس کی چال بالکل اتنی ہی نہیں ہوگی جس چال سے اسے پھینکا گیا تھا۔

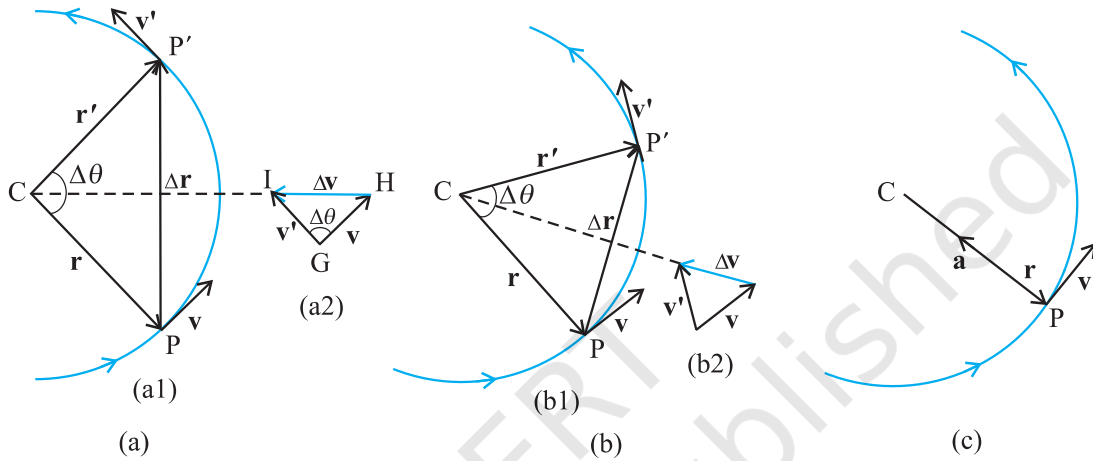
ہوا کی مزاحمت کی غیرموجودگی میں، رفتار کا x-جز مستقلہ رہتا ہے اورصرف y-جز میں ہی لگاتار تبدیلی ہوتی رہتی ہے۔لیکن ہوا کی مزاحمت کی موجودگی میں، یہ دونوں اجزاء متاثر ہوں گے۔اس کا مطلب ہوا کہ سعت کی قدر اس قدر سے کم ہوگی جو مساوات (4.43) سے حاصل ہوتی ہے۔حاصل ہونے والی اعظم اونچائی کی قدر بھی اس قدر سے کم ہوگی جس کی پیشن گوئی مساوات (4.42) کے ذریعے کی جاسکتی ہے۔اب آپ کیا اڑان وقت میں تبدیلی کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

ہوا کی مزاحمت سے بچنے کے لیے ہمیں یہ تجربہ خلاء میں یا کم دباؤ کے تحت کرنا ہوگا، جو آسان نہیں ہے۔جب ہم یہ فقرہ استعمال کرتے ہیں: ''ہوا کی مزاحمت نظرانداز کردیجیے''، تو ہمارا مطلب ہوتا ہے کہ سِعت، اعظم اونچائی وغیرہ جیسے پیرامیٹروں میں تبدیلی، ان کی اس قدر کے مقابلے میں بہت کم ہے جو ہوا کی مزاحمت کی غیرموجودگی میں حاصل ہوتی ہے۔ہوا کی غیرموجودگی میں تحسیب، ہوا کی موجودگی میں تحسیب کے مقابلے میں بہت سادہ ہے۔

4.11 یکساں دائری حرکت (UNIFORM CIRCULAR MOTION)

جب کوئی شے دائری راہ پر مستقلہ چال سے چلتی ہے تو شے کی حرکت کو **یکساں دائری حرکت کہتے ہیں**۔لفظ'' یکساں اس چال کے ضمن میں استعمال ہوا ہے جو شے کی حرکت کی پوری مدت میں یکساں (مستقل) رہتی ہے۔مانا کہ ایک شے نصف قطر R کے دائرہ پر یکساں چال (uniform speed) سے حرکت کررہی ہے، جیسا کہ شکل 4.19 میں دکھایا گیا ہے۔کیونکہ شے کی رفتار میں، سمت کے لحاظ سے، لگاتار تبدیلی ہورہی ہے، لہٰذا اس میں اسراع پیدا ہورہا ہے۔آیئے اس اسراع کی سمت اوراس کی عددی قدر معلوم کریں۔

مانا **r** اور **r'** اور **v** اور **v'** ذرے کے مقام اور حرکت سمتیہ ہیں جب وہ حرکت کے دوران علی الترتیب نقاط P اور P' پر ہے [شکل (a)4.22]۔ تعریف کے مطابق، کسی نقطے پر ذرے کی رفتار اس نقطے پر مماس کے موافق حرکت کی سمت میں ہوتی ہے۔ شکل (a1 4.19) میں رفتار سمتیوں **v** اور **v'**

اسراع، ساعتی اسراع کے برابر ہوجاتا ہے۔ اس کی سمت مرکز کی جانب ہوتی ہے*۔ اس طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یکساں دائری حرکت کے لیے شے کی اسراع کی سمت ہمیشہ دائرے کے مرکز کی جانب ہوتی ہے۔ اب ہم اس اسراع کی عددی قدر نکالیں گے۔

شکل 4.19 یکساں دائری حرکت کرتی ہوئی شے کے لیے رفتار اور اسراع۔ شکل (a) سے شکل (c) تک وقفہ Δt گھٹتا جاتا ھے (شکل c میں صفر ھو جاتا ھے) دائری راہ کے ھر ایك نقطہ پر اسراع دائرے کے مرکز کی جانب ھوتا ھے۔

کو دکھایا گیا ہے۔ شکل (a2 4.19) میں سمتیہ جمع کے مثلث قانون کا استعمال کرکے **Δv** حاصل کیا گیا ہے۔ کیونکہ راہ دائری ہے، اس لیے شکل میں ظاہر ہے **v**,**r** پر اور **v'**,**r'** پر عمود ہیں، اس لیے **Δr**, **Δv** کے عمودی ہوگا۔ چونکہ اوسط اسراع Δv کی سمت میں ہے، $(\mathbf{a}=\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t})$ اس لیے $\bar{a}$ بھی **Δr** کے عمودی ہوگا۔ اب اگر ہم **Δv** کو اس خط پر رکھیں جو **r** اور **r'** کے درمیان کے زاویے کی تنصیف (bisect) کرتا ہے تو ہم دیکھیں گے کہ اس کی سمت دائرے کے مرکز کی جانب ہوگی۔ انہیں مقداروں کو [شکل (b 4.19] میں مقابلتاً چھوٹے وقفہ وقت کے لیے دکھایا گیا ہے۔ **Δv**، لہٰذا **a** کی سمت پھر مرکز کی جانب ہے۔ [شکل (c)4.19] میں Δt→0 ہے، اس لیے اوسط

تعریف کے مطابق، **a** کی عددی قدر درج ذیل فارمولے سے ظاہر ہوتی ہے۔

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

مان لیجیے **r** اور **r'** کے درمیان کا زاویہ Δθ ہے۔ چونکہ رفتار سمتیے **v** اور **v'** ہمیشہ مقام سمتیوں کے عمودی ہوتے ہیں، اس لیے ان کے درمیان کا زاویہ بھی Δθ ہوگا۔ لہٰذا مقام سمتیوں کے ذریعہ بنا مثلث (ΔCPP') اور رفتار سمتیوں **v**,**v'** اور **Δv** کے ذریعہ بنا مثلث (ΔGHI) مماثل (مشابہ) (similar) مثلث ہیں [شکل (a)4.19]۔ اس طرح ایک مثلث کے

*شکل 4.19 Δt→0 حد میں Δr⃗، r⃗ پر عمود ہوجاتا ھے۔ اس حد میں، Δr⃗→0 اور آخر کار یہ بھی $\vec{v}$ پر عمود ھوجاتی ھے۔ اس لیے، دائری راستے کے ھر نقطے پر، اسراع کی سمت مرکز کی جانب ھوتی ھے۔

اساس کی لمبائی اور ضلع کی لمبائی کی نسبت دوسرے مثلث کی متطابق لمبائیوں کی نسبت کے برابر ہوگی۔

یعنی

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

یا

$$|\Delta \mathbf{v}| = v\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

اس لیے،

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v|\Delta \mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

اگر Δt چھوٹا ہے تو $\Delta\theta$ بھی چھوٹا ہوگا۔ ایسی حالت میں قوس PP' کو تقریباً $\Delta \mathbf{r}$ کے برابر لے سکتے ہیں :

یعنی $|\Delta \mathbf{r}| \cong v\Delta t$

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \cong v$$

یا

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = v$$

اس طرح مرکز جو اسراع (centripetal acceleration a_c) کی عددی قدر درج ذیل ہوگی،

$$a_c = (v / R)\, v = v^2/R \qquad (4.44)$$

اس طرح کسی R نصف قطر والے دائرہ پر v چال سے متحرک شے کے اسراع کی قدر v^2/R ہوتی ہے جس کی سمت ہمیشہ دائرہ کے مرکز کی جانب ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ اس طرح کے اسراع کو **مرکز جو اسراع** (centripetal acceleration) کہتے ہیں (اس اصطلاح کی تجویز نیوٹن نے پیش کی تھی)۔ مرکز جو اسراع سے متعلق مکمل تجزیہ سب سے پہلے 1673 میں ایک ڈچ سائنس داں کرسچیان ہائی گینس (Christiaan Huygens) (1629 تا 1695) نے شائع کروایا تھا لیکن غالباً نیوٹن کو بھی کچھ سال قبل ہی اس کا علم ہو چکا تھا۔ مرکز جو یعنی "centripetal" لفظ گریک لفظ سے اخذ کیا گیا ہے جس کا مطلب مرکز رخی یا مرکز کی جانب ہے۔ چونکہ v اور R دونوں مستقلے ہیں اس لیے مرکز جو اسراع کی عددی قدر بھی مستقلہ ہوتی ہے۔ تاہم سمت بدلتی رہتی ہے اور ہمیشہ مرکز کی جانب ہوتی ہے۔ اس طرح مرکز جو اسراع مستقلہ سمتیہ نہیں ہوتا۔

کسی شے کی یکساں دائری حرکت میں رفتار اور اسراع کو ہم ایک دوسرے طریقے سے بھی سمجھ سکتے ہیں۔ شکل 4.22 کے مطابق $\Delta t\ (= t'-t)$ وقفہ وقت میں جب ذرہ P سے P' پر پہنچ جاتا ہے تو خط CP زاویہ $\Delta\theta$ سے گھوم جاتا ہے۔ $\Delta\theta$ کو ہم زاویائی فاصلہ کہتے ہیں۔ زاویائی رفتار ω (گریک حرف، اومیگا) کو ہم زاویائی نقل کی وقت کے ساتھ شرحِ تبدیلی کے طور پر معرف کرتے ہیں۔ اس طرح

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.45)$$

اب اگر Δt وقت میں ذرے کے ذریعہ طے کی گئی دوری کو Δs سے ظاہر کریں (یعنی $\Delta s = PP'$) تو،

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

لیکن $\Delta s = R\Delta\theta$، اس لیے

$$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

لہٰذا

$$v = \omega R \qquad (4.46)$$

مرکز جو اسراع کو ہم زاویائی چال کی شکل میں بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔ یعنی،

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_c = \omega^2 R \qquad (4.47)$$

دائرہ کا ایک چکر لگانے میں شے کو جو وقت لگتا ہے اسے ہم اس کا دور T کہتے ہیں۔ ایک سیکنڈ میں شے جتنے چکر لگاتی ہے (طواف کرتی ہے)، اسے ہم شے کا تعدد (frequency) ($\nu = \frac{1}{T}$) کہتے ہیں۔ لیکن اتنے وقت میں جس میں شے ایک چکر لگاتی ہے شے کے ذریعہ چلی گئی

دوری $s = 2\pi R$ ہوتی ہے،

$$v = 2\pi R/T = 2\pi R\nu \qquad (4.48)$$

اس طرح v،ω اور a_c کو ہم تعدد ν کی اصطلاح میں ظاہر کر سکتے ہیں، یعنی

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$v = 2\pi R\nu$$

$$a_c = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (4.49)$$

مثال 4.10 ایک کیڑا، 12 cm نصف قطر کے دائری کھانچے میں پھنس گیا ہے۔ وہ اس کھانچے پر یکساں چال سے چلتا رہتا ہے اور 100 سیکنڈ میں 7 چکر لگا لیتا ہے (a) کیڑے کی زاویائی چال اور خطی چال کتنی ہوگی؟ (b) کیا اسراع سمتیہ ایک مستقل سمتیہ ہے۔ اس کی قدر کتنی ہوگی؟

جواب یہ ایک یکساں دائری حرکت کی مثال ہے۔ یہاں $R = 12$ cm ہے۔ زاویائی چال ω کی قدر ہے :

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

اور خطی چال v ہے:

$$v = \omega R = 0.44 \text{ s}^{-1} \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}$$

دائرے کے ہر نقطے پر رفتار v کی سمت اس نقطہ پر مماسی خط کی سمت میں ہوگی اور اسراع کی سمت دائرے کے مرکز کی جانب ہوگی۔ چونکہ یہ سمت لگاتار بدلتی رہتی ہے، اس لیے اسراع ایک مستقل سمتیہ نہیں ہے۔ لیکن اسراع کی عددی قدر مستقلہ ہے، یہ عددی قدر ہے:

$$a = \omega^2 R = (0.44 \text{ s}^{-1})^2 (12 \text{ cm})$$

$$= 2.3 \text{ cm s}^{-2}$$

خلاصہ

1۔ عددیہ مقداریں وہ مقداریں ہیں جن میں صرف عددی قدریں (magnitudes) ہوتی ہیں۔ دوری، چال، کمیت اور درجہ حرارت عددیہ مقداروں کی کچھ مثالیں ہیں۔

2۔ سمتیہ مقداریں وہ مقداریں ہیں جن میں قدر اور سمت دونوں ہوتی ہیں۔ نقل، رفتار، اسراع وغیرہ اس طرح کی مقداروں کی کچھ مثالیں ہیں۔ یہ مقداریں سمتیہ الجبرا کے کچھ مخصوص اصولوں کی تعمیل کرتی ہیں۔

3۔ اگر کسی سمتیہ **A** کو کسی حقیقی عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک دوسرا سمتیہ **B** حاصل ہوتا ہے جس کی عددی قدر **A** کی عددی قدر کی λ گنا ہوتی ہے۔ نئے سمتیہ کی سمت یا تو A کے سمت ہوتی ہے یا اس کے مخالف۔ سمت اس بات پر منحصر ہوتی ہے کہ λ مثبت ہے یا منفی۔

4۔ دو سمتیوں **A** اور **B** کو جوڑنے کے لیے گرافی طریقہ بروئے کار لایا جاتا ہے جس کے لیے یا تو سر سے دُم (head to tail) یا پھر متوازی الاضلاع طریقے کا استعمال کرتے ہیں۔

5۔ سمتیوں کی جمع تقلیبی(commutative) ہوتی ہے :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

یہ اتصالی قانون(associative law) کی بھی تعمیل کرتا ہے :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

6۔ معدوم (Null) یا صفر سمتیہ ایسا سمتیہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر صفر ہوتی ہے۔کیونکہ عددی قدر صفر ہوتی ہے،اس لیے اس کی سمت معین کرنا ضروری نہیں ہے۔

اس کی درج ذیل خاصیتیں ہوتی ہیں :

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

7۔ سمتیہ **B** کو **A** سے نفی کرنے کے عمل کو ہم **A** اور **B**– کو جوڑنے کے طور پر معرف کرتے ہیں :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

8۔ کسی سمتیہ **A** کو کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں **a** اور **b** کی سمت میں جز تجزیہ (resolve) کر سکتے ہیں:

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

یہاں λ اور μ حقیقی اعداد ہیں۔

9۔ کسی سمتیہ **A** سے وابستہ اکائی سمتیہ وہ سمتیہ ہے جس کی عددی قدر 1 ہوتی ہے اور وہ **A** کی سمت میں واقع ہوتا ہے۔اکائی سمتیہ

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

اکائی سمتیے $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$، $\hat{\mathbf{k}}$ اکائی عددی قدر والے ایسے سمتیے ہیں جو داہنے ہاتھ والے کوآرڈی نیٹ نظام میں بالترتیب x، y اور z محوروں کی سمت میں واقع ہوتے ہیں۔

10۔ سمتیہ **A** کو ہم درج ذیل شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں :

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}}$$

یہاں A_x اور A_y علی الترتیب x–، y– محوروں کی سمت میں **A** کے اجزا ہیں۔اگر سمتیہ A، x– محور کے ساتھ θ زاویہ بناتا ہے تو

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \ \tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \text{ اور } A_x = A\cos\theta,\ A_y = A\sin\theta$$

11۔ تجزیاتی طریقے سے بھی سمتیوں کو آسانی سے جوڑا جا سکتا ہے۔اگر x - y مستوی میں دو سمتیوں **A** اور **B** کی جمع **R** ہو،تو:

$$\mathbf{R} = R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} \text{ جہاں } R_x = A_x + B_x \text{ اور } R_y = A_y + B_y$$

12۔ مستوی میں کسی شے کے مقام سمتیہ 'r' کو اکثر درج ذیل طور پر ظاہر کرتے ہیں $\mathbf{r} = \times\,\hat{i} + y\hat{\mathbf{j}}$ مقام سمتیوں r اور 'r کے درمیان نقل (displacement) کو درج ذیل طور پر لکھتے ہیں

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$
$$= (x' - x)\hat{\boldsymbol{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}$$
$$+\Delta x\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}$$

13۔ اگر کوئی شے وقفہ وقت $\Delta\mathbf{t}$ میں $\Delta\mathbf{r}$ نقل کرتی ہے تو اس کی اوسط رفتار $\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ ہوگی۔ کسی ساعت $\boldsymbol{t}$ پر شے کی رفتار اس کی اوسط رفتار کی اُس انتہائی قدر کے برابر ہوتی ہے جب $\Delta\mathbf{t}$ صفر کے قریب تر ہو جاتا ہے۔ یعنی

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathrm{d}t}$$

اکائی سمتیہ علامتوں میں اس طرح لکھ سکتے ہیں $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$

جہاں $v_x = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}$

جب کسی کو آرڈی نیٹ نظام میں کسی شے کے مقام کو دکھایا جاتا ہے تو $\mathbf{v}$ کی سمت ہمیشہ اس شے کا راستہ دکھانے والے منحنی پر کھینچی گئی مماس کی سمت میں ہوتی ہے۔

14۔ اگر شے کی رفتار، Δt وقفہ وقت میں، $\mathbf{v}$ سے $\mathbf{v}'$ ہو جاتی ہے تو اس کا اوسط اسراع $\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$ ہوگا۔

کسی ساعت t پر اسراع $\mathbf{a}$ اوسط اسراع $\bar{\mathbf{a}}$ کی وہ انتہائی قدر ہے، جب کہ $\Delta t \to 0$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathrm{d}t}$$

اجزاء کی شکل میں اسے درج ذیل طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے :

$$a = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

یہاں، $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$

15۔ اگر ایک شے کسی مستوی میں یکساں (مستقل) اسراع $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ سے متحرک ہے اور ساعت $t = 0$ پر اس کا مقام سمتیہ $\mathbf{r}_0$ ہے، تو کسی دیگر ساعت t پر اس کا مقام سمتیہ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\,t + 1/2\ \mathbf{a}\,t^2$ ہوگا اور اس کی رفتار $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\,t$ ہوگی۔

یہاں $\mathbf{v}_0$، t = o ساعت پر شے کے رفتار کو ظاہر کرتا ہے۔

اجزاء کی شکل میں :

$$x = x_0 + v_{0x}\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2}\, a_y\, t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x\, t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y\, t$$

کسی مستوی میں حرکت کو دو الگ الگ ہم وقتی یک بُعدی اور باھمی عمودی حرکات کے انطباق کے طورپر مان سکتے ھیں۔

16۔ پھینکے جانے کے بعد جب کوئی شے اڑان میں ہوتی ہے تو اسے پروجکٹائل کہتے ہیں۔اگرایک شےکو x-محور سے θ زاویہ بناتے ہوئے، ابتدائی رفتار v_0 سے پھینکا جائے اور ہم یہ فرض کرلیں کہ اس کا آغازی مقام،کوآرڈی نیٹ نظام کے مبدے پر منطبق ہے تو t ساعت کے بعد پروجکٹائل کے مقام اور رفتار سے متعلق مساواتیں درج ذیل ہوں گی :

$$x = (v_0 \cos \theta_0)\, t$$

$$y = (v_0 \sin \theta_0)\, t - (1/2)\, g t^2$$

$$v_x = v_{0x} = v \cos \theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t$$

پروجکٹائل کی راہ مکافی(parabolic) ہوتی ہے۔جس کی مساوات ہوگی:

$$y = (\tan\theta_0)\, x - \frac{g x^2}{2\,(v_o \cos\theta_o)^2}$$

پروجکٹائل کی اعظم اونچائی

$$h_m = \frac{(v_o\ \sin\theta_o)^2}{2g}$$

اور اس اونچائی تک پہنچنے میں لگا وقت ہوگا :

$$t_m = \frac{v_o\ \sin\theta_o}{g}$$

پروجکٹائل کے ابتدائی مقام اور اسکے نیچے گرنے کے اس مقام، جہاں $y = o$ ہوتا ہے، کے درمیان کے افقی فاصلہ کو پروجکٹائل کی سِعت(range) R کہتے ہیں۔اسے درج ذیل طور پر ظاہر کرتے ہیں: $R = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta_o$

17۔ جب کوئی شے مستقل چال سے ایک دائری راہ میں چلتی ہے تو اسے یکساں دائری حرکت کہتے ہیں۔اگر شے کی چال v ہو اور دائرہ کا نصف قطر R ہو، تو اسراع کی عددی قدر $a_c = v^2 / R$ ہوگی اور اس کی سمت ہمیشہ مرکز کی جانب ہوگی۔

زاویائی چال ω زاویائی دوری کی تبدیلی کی شرح ہے۔خطی رفتار $v = \omega R$ ہوگی اور اسراع $a_c = \omega^2 R$ ہوگا۔

اگر T طواف کا دور اور υ اس کا تعدد ہو تو ω, υ اور a_c کی قدر درج ذیل ہوں گی:

$$\omega = 2\pi\upsilon, \quad \upsilon = 2\pi\upsilon R, \quad a_c = 4\pi^2\upsilon^2 R$$

طبیعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	تبصرہ
مقام سمتیہ		[L]		سمتیہ۔ اسے کسی دیگر علامت سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔
نقل		[L]		,,
رفتار		$[LT^{-1}]$		
(a) اوسط				$= \Delta \mathbf{r}/\Delta t$ ، سمتیہ
(b) ساعتی				$= d\mathbf{r}/dt$ ، سمتیہ
اسراع		$[LT^{-2}]$		
(a) اوسط				$= \Delta \mathbf{v}/\Delta t$ ، سمتیہ
(b) ساعتی				$= d\mathbf{v}/dt$ ، سمتیہ
پروجکٹائل حرکت				
(a) اعظم اونچائی تک پہنچنے میں لگا وقت		[T]		$= \dfrac{v_o \sin\theta_0}{g}$
(b) اعظم اونچائی		[L]		$= \dfrac{(v_o \sin\theta_0)^2}{2g}$
(c) افقی سعت		[L]		$= \dfrac{(v_o^2 \sin 2\theta_0)^2}{g}$
دائری حرکت				
(a) زاویائی چال		$[T^{-1}]$		$= \Delta\theta/\Delta t = \upsilon/r$
(b) مرکز جو اسراع		$[LT^{-2}]$		$= \upsilon^2/r$

قابل غور نکات

1۔ کسی شے کے ذریعہ دو نقاط کے درمیان کی راہ لمبائی عام طور پر، نقل کی عددی قدر کے برابر نہیں ہوتی۔ نقل صرف راہ کے انتہائی نقاط پر منحصر ہوتا ہے جب کہ راہ لمبائی (جیسا کہ نام سے ہی ظاہر ہے) حقیقی راہ پر منحصر ہوتی ہے۔ دونوں مقداریں تبھی برابر ہوں گی جب شے حرکت کے راستے میں اپنی سمت نہیں بدلتی۔ دیگر دوسرے حالات میں راہ لمبائی نقل کی عددی قدر سے زیادہ ہوتی ہے۔

2۔ درج بالا نقطہ 1 کے لحاظ سے شے کی اوسط چال کسی دیئے گئے وقفۂ وقت میں یا تو اس کی اوسط رفتار کی عددی قدر کے برابر ہوگی یا اس سے زیادہ ہوگی۔ دونوں برابر تب ہوں گی جب راہ لمبائی نقل کی عددی قدر کے برابر ہو۔

3۔ سمتیہ مساوات (4.46a) اور (4.47 a اور c) میں محوروں کا انتخاب شامل نہیں ہوتا۔ بلاشبہ آپ انہیں کن ہی دو آزاد محوروں کی سمت میں جز تجزیہ کر سکتے ہیں۔

4۔ مستقل اسراع کے لیے مجرد حرکیاتی مساوات یکساں دائری حرکت میں لاگو نہیں ہوتیں کیونکہ اس میں اسراع کی عددی قدر تو مستقلہ رہتی ہے لیکن اس کی سمت مستقل بدلتی رہتی ہے۔

5۔ اگر کسی شے کی دو رفتاریں $\mathbf{v}_1$ اور $\mathbf{v}_2$ ہوں تو ان کی حاصل رفتار $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ہوگی۔ اس بات کا دھیان رکھیں کہ شے نمبر 2 کی مناسبت سے شے نمبر 1 کی رفتار مذکورہ بالا بیان سے مختلف ہوتی ہے جسے یوں لکھا جاتا ہے $v_{12} = v_1 - v_2$ جہاں v_1 اور v_2 کسی مشترکہ حوالہ جاتی فریم کے مطابق رفتاریں ہیں۔

6۔ دائری حرکت میں شے کے حاصل اسراع کی سمت دائرے کے مرکز کی طرف صرف جب ہی ہوتی ہے اگر اس کی چال مستقلہ ہے۔

7۔ کسی شے کا حرکت کا خط (trajectory) صرف اسراع سے ہی متعین نہیں ہوتا بلکہ وہ حرکت کی ابتدائی شرائط (ابتدائی مقام اور ابتدائی رفتار) کے بھی تابع ہے۔ مثال کے لیے، ارضی کشش اسراع کے تحت حرکت کر رہی ایک حرکت خط مستقیم بھی ہو سکتا ہے اور مکافی بھی، جو ابتدائی شرائط پر منحصر ہے۔

مشق

4.1 درج ذیل طبیعی مقداروں میں بتائیے کہ کون سی سمتیہ ہے اور کون سی عددیہ:

حجم، کمیت، چال، اسراع، کثافت، مول کی تعداد، رفتار، زاویائی تعدد، نقل، زاویائی رفتار۔

4.2 درج ذیل فہرست میں دو عددیہ مقداروں کو چنیے۔

قوت، زاویائی معیار حرکت، کام، برقی رو، خطی معیار حرکت *(linear momentum)*، برقی میدان، اوسط رفتار، مقناطیسی معیار اثر (moment)، نسبتی رفتار۔

4.3 درج ذیل فہرست میں صرف ایک سمتیہ مقدار شامل ہے۔ اسے چنیے:

درجہ حرارت، دباؤ، دھکا (impulse)، وقت، پاور، پوری راہ لمبائی، توانائی، مادی کشش قوۃ، رگڑ کا ضربیہ، چارج۔

4.4 اسباب کے ساتھ بیان کیجیے کہ عددیہ اور سمتیہ طبیعی مقداروں کے ساتھ کیا درج ذیل الجبری عمل بامعنی ہیں؟

(a) دو عددیوں کو جوڑنا (b) یکساں ابعاد کے ایک سمتیہ اور ایک عددیہ کو جوڑنا (c) ایک سمتیہ کو عددیہ سے ضرب کرنا (d) دو عددیوں کا ضرب (e) دو سمتیوں کو جوڑنا (f) کسی سمتیے کے ایک جزو کو اسی سمتیے میں جوڑنا۔

4.5 درج ذیل ہر ایک بیان کوغور سے پڑھیے اور وجہ کے ساتھ بتائیے کہ یہ صحیح ہے یا غلط :

(a) کسی سمتیہ کی عددی قدر ہمیشہ ایک عددیہ ہوتی ہے، (b) کسی سمتیے کا ہر ایک جزو ہمیشہ عددیہ ہوتا ہے۔ (c) کل راہ لمبائی ہمیشہ ذرّے کے نقل سمتیہ کی عددی قدر کے برابر ہوتی ہے۔ (d) کسی ذرے کی اوسط چال (راہ طے کرنے میں لگے وقت کے ذریعہ تقسیم کی گئی کل راہ لمبائی) وقت کے یکساں وقفے میں ذرے کی اوسط رفتار کی عددی قدر سے زیادہ یا اس کے برابر ہوتی ہے۔ (e) ان تین سمتیوں کا جوڑ، جو ایک مستوی میں نہیں ہیں، کبھی بھی صفر سمتیہ نہیں ہوتا۔

4.6 درج ذیل سمتیہ لا مساواتوں کو جیومیٹریائی طریقے یا کسی دیگر طریقے سے ثابت کیجیے :

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

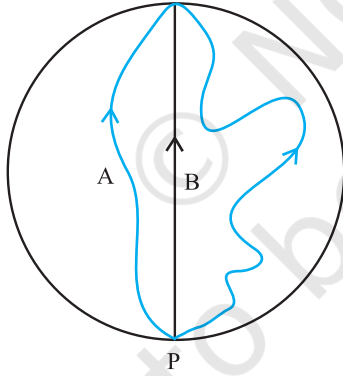
(b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| > ||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

(d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| > ||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||$

درج بالا مساواتی علامت کا کب اطلاق ہوتا ہے؟

4.7 دیا ہے $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$، نیچے دیئے گئے

بیانات میں سے کون سا صحیح ہے :

(a) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ اور $\mathbf{d}$ میں سے ہر ایک صفر سمتیہ ہے۔

(b) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})$ کی عددی قدر $(\mathbf{b}+\mathbf{d})$ کی عددی قدر کے برابر ہے۔

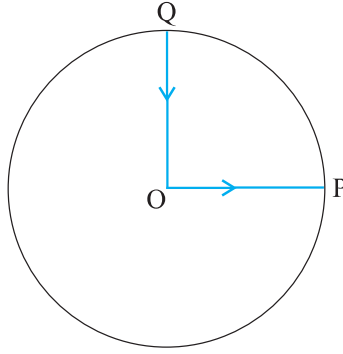
(c) $\mathbf{a}$ کی عددی قدر $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ اور $\mathbf{d}$ کی عددی قدروں کی حاصل جمع سے کبھی بھی زیادہ نہیں ہوسکتی۔

(d) اگر $\mathbf{a}$ اور $\mathbf{d}$ ہم خطی نہیں ہے تو $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ ضرور ہی $\mathbf{a}$ اور $\mathbf{d}$ کی مستوی میں ہوگا اور $\mathbf{a}$ اور $\mathbf{d}$ کی سمت میں ہوگا اگر وہ ہم خطی ہیں۔

شکل 4.20

4.8 تین لڑکیاں 200 m نصف قطر والی دائری برفیلی سطح پر اسکیٹنگ کر رہی ہیں۔ وہ سطح کے کنارے کے نقطے P سے چلنا شروع کرتی ہیں اور P سے قطری طور پر مخالف نقطہ Q پر مختلف راہوں سے ہوکر پہنچتی ہیں جیسا کہ شکل (4.23) میں دکھایا گیا ہے۔ ہر ایک لڑکی کے نقل سمتیہ کی عددی قدر کتنی ہے؟ کس لڑکی کے لیے حقیقت میں یہ اسکیٹ کی گئی حقیقی راہ کی لمبائی کے برابر ہے؟

4.9 کوئی سائیکل سوار کسی دائری پارک کے مرکز O سے چلنا شروع کرتا ہے اور پارک کے کنارے P پر پہنچتا ہے۔ پھر وہ پارک کے محیط پر سائیکل چلاتا ہوا QO کے راستے [جیسا (شکل 4.24) میں دکھایا گیا ہے سے O] پر واپس آجاتا ہے۔ پارک کا

نصف قطر 1km ہے۔ اگر پورے چکر میں 10 منٹ لگتے ہوں تو سائیکل سوار کی (a) کل نقل (b) اوسط رفتار اور (c) اوسط چال کیا ہوگی؟

شکل 4.21

4.10 کسی کھلے میدان میں کوئی موٹر ڈرائیور ایک ایسا راستہ اپناتا ہے جو ہر ایک 500 m کے بعد اس کے بائیں جانب 60^0 کے زاویے پر مڑ جاتا ہے۔ کسی دیئے ہوئے موڑ سے شروع ہوکر موٹر ڈرائیور کا تیسرے، چھٹے اور آٹھویں موڑ پر نقل بتائیے۔ ہر ایک صورت میں موٹر گاڑی کے ذریعہ موڑوں پر طے کی گئی کل راہ لمبائی کے ساتھ نقل کی عددی قدر کا موازنہ کیجیے۔

4.11 کوئی مسافر کسی نئے شہر میں آیا ہے اور وہ اسٹیشن سے کسی سیدھی سڑک پر واقع کسی ہوٹل تک جو 10 km دور ہے، جانا چاہتا ہے۔ کوئی بے ایمان ٹیکسی ڈرائیور 23 km کے گھماؤ دار راستے سے اسے لے جاتا ہے اور 28 منٹ میں ہوٹل میں پہنچتا ہے۔
(a) ٹیکسی کی اوسط چال، اور (b) اوسط رفتار کی عددی قدر کیا ہوگی؟ کیا وہ برابر ہیں؟

4.12 بارش کا پانی $30\ m\ s^{-1}$ کی چال سے عمودی طور پر نیچے گر رہا ہے۔ کوئی خاتون شمال سے جنوب کی طرف $10\ m\ s^{-1}$ کی چال سے سائیکل چلا رہی ہیں۔ انہیں اپنا چھاتا کس سمت میں رکھنا چاہیے؟

4.13 کوئی شخص ٹھہرے ہوئے پانی میں 4 km/h کی چال سے تیر سکتا ہے۔ اسے 1 km چوڑی ندی کو پار کرنے میں کتنا وقت لگے گا اگر ندی 3 km/h کی چال سے یکساں طور پر بہہ رہی ہو اور وہ ندی کے بہاؤ کے عمودی تیر رہا ہو۔ جب وہ ندی کے دوسرے کنارے پہنچتا ہے تو وہ ندی کے بہاؤ کی جانب کتنی دور پہنچے گا؟

4.14 کسی بندرگاہ میں 72 km/h کی چال سے ہوا چل رہی ہے اور بندرگاہ میں کھڑی کسی ناؤ کے اوپر لگا جھنڈا N-E سمت میں لہرا رہا ہے۔ اگر وہ ناؤ شمال کی جانب 51 km/h چال سے حرکت کرنا شروع کردے تو ناؤ پر لگا جھنڈا کس سمت میں لہرائے گا؟

4.15 کسی لمبے ہال کی چھت 25 m اونچی ہے۔ وہ زیادہ سے زیادہ افقی دوری کتنی ہوگی جس میں $40\ m\ s^{-1}$ کی چال سے پھینکی گئی کوئی گیند چھت سے ٹکرائے بغیر گزر جائے؟

4.16 کرکٹ کا کوئی کھلاڑی کسی گیند کو 100 m کی زیادہ سے زیادہ افقی دوری تک پھینک سکتا ہے۔ وہ کھلاڑی اسی گیند کو زمین سے اوپر کتنی اونچائی تک پھینک سکتا ہے؟

4.17 80 cm لمبے دھاگے کے ایک سرے پر ایک پتھر باندھا گیا ہے اور کسی یکساں چال کے ساتھ کسی افقی دائرے میں گھمایا جاتا ہے۔

اگر پتھر 25 s میں 14 چکر لگاتا ہے تو پتھر کے اسراع کی عددی قدر اور اس کی سمت کیا ہوگی؟

4.18 کوئی ہوائی جہاز 900 km/h کی یکساں چال سے اڑ رہا ہے اور 1km نصف قطر کا کوئی افقی لوپ بناتا ہے۔ اس کے مرکز جو اسراع کا مادی کشش اسراع کے ساتھ موازنہ کیجیے۔

4.19 نیچے دیئے گئے بیانوں کو غور سے پڑھیے اور وجہ کے ساتھ بتائیے کہ وہ صحیح ہیں یا غلط:

(a) دائری حرکت میں کسی ذرے کا کل اسراع ہمیشہ دائرے کی نصف قطر کی سمت میں مرکز کی جانب ہوتا ہے۔

(b) کسی نقطے پر کسی ذرے کا رفتار سمتیہ ہمیشہ اس نقطے پر ذرے کی راہ کے مماسی ہوتا ہے۔

(c) کسی ذرے کی یکساں دائری حرکت میں ایک دور میں لیا گیا اوسط اسراع سمتیہ ایک صفر یا نل سمتیہ ہوتا ہے۔

4.20 کسی ذرے کا مقام سمتیہ درج ذیل ہے:

$$\mathbf{r} = (3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}})\ \text{m}$$

وقت t سیکنڈ میں ہے اور **r** کے سبھی ضریب میٹر میں ہیں تو

(a) ذرے کا **v** اور **a** نکالیے۔

(b) $t = 2s$ پر ذرے کی رفتار کی عددی قدر اور سمت کیا ہوگی؟

4.21 کوئی ذرہ $t = 0$ ساعت پر مبدا سے $10\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{ms}^{-1}$ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے اور x-y مستوی میں یکساں اسراع $(8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 8.0\,\hat{i}\ \ 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{ms}^{-2}$ سے حرکت کرتا ہے تو

(a) کس ساعت ذرے کا x- کوآرڈی نیٹ 16 m ہوگا؟ اسی وقت اس کا y- کوآرڈی نیٹ کتنا ہوگا؟

(b) اس ساعت ذرے کی چال کتنی ہوگی؟

4.22 $\hat{\mathbf{i}}$ اور $\hat{\mathbf{j}}$ علی الترتیب x- اور y- محوروں کی سمت میں اکائی سمتیہ ہیں۔ سمتیوں $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ اور $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ کی عددی قدر اور سمت کیا ہوگی؟ سمتیہ $\mathbf{A} = 2\,\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ کے $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ اور $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ کی سمتوں کی سمت میں اجزاء نکالیے۔

4.23 فضا میں کی جاسکنے والی کسی بھی حرکت کے لیے درج ذیل رشتوں میں کون سا صحیح ہے:

(a) $\mathbf{v}_{average} = [1/2)\ (\mathbf{v}\ (t_1) + \mathbf{v}\ (t_2)]$

(b) $\mathbf{v}_{average} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\ ]\ /(t_2 - t_1)$

(c) $\mathbf{v}\ (t) = \mathbf{v}\ (0) + \mathbf{a}\ t$

(d) $\mathbf{r}\ (t) = \mathbf{r}\ (0) + \mathbf{v}\ (0)\ t + (1/2)\ \mathbf{a}\ t^2$

(e) $\mathbf{a}_{average} = [\ \mathbf{v}\ (t_2) - \mathbf{v}\ (t_1\ )]\ /(\ t_2 - t_1)$

یہاں 'اوسط' سے مراد وقفہ وقت t_2 اور t_1 کے دوران طبیعی مقدار کی اوسط قدر سے ہے۔

4.24 نیچے دیے ہوئے ہر بیان کو غور سے پڑھیے اور وجہ اور مثالوں کے ساتھ بتائیے کہ بیان درست ہے یا نہیں۔

ایک عددیہ مقدار وہ ہے

(a) جس کی ایک عمل کے دوران بقا ہوتی ہے (b) جس کی قدر کبھی منفی نہیں ہوسکتی

(c) جس کے لیے غیر ابعادی ہونا لازمی ہے (d) فضا میں ایک نقطے سے دوسرے نقطے پر تبدیلی نہیں ہوتی۔

(e) ایسے مشاہدوں کے لیے جن کے محوروں کے رخ مختلف ہوں، اس کی قدر یکساں ہوتی ہے۔

4.25 کوئی جہاز زمین سے 3400 m کی اونچائی پر پرواز کر رہا ہے اگر جہاز کے ذریعہ 10 سیکنڈ میں طے کردہ فاصلہ زمین پر واقع کسی مقام مشاہدہ پر 30^0 کا زاویہ ثبت کرتا ہو تو جہاز کی چال کتنی ہے؟

اضافی مشق

4.26 کسی سمتیہ میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں۔ کیا فضا میں اس کا کوئی متعین مقام ہوتا ہے؟ کیا یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوسکتا ہے؟ کیا فضا میں مختلف مقامات پر واقع دو برابر سمتیوں **a** اور **b** کا یکساں طبیعی اثر پڑنا ضروری ہے۔ اپنے جواب کی تائید میں مثال دیجیے۔

4.27 کسی سمتیہ میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں۔ کیا اس کا یہ مطلب ہے کہ کوئی شے جس کی عددی قدر اور سمت ہو، وہ ضرور ہی سمتیہ ہوگی؟ کسی شے کے گردش کی تشریح گردش محور کی سمت اور محور کے گرد گردش زاویہ کے ذریعہ کی جاسکتی ہے؟ کیا اس کا یہ مطلب ہے کہ کوئی بھی گردش ایک سمتیہ ہے؟

4.28 کیا آپ درج ذیل کے ساتھ کوئی سمتیہ متعلق کر سکتے ہیں:

(a) ایک لوپ میں موڑی گئی تار کی لمبائی (b) ایک ہموار رقبہ (c) ایک کرہ، تشریح کیجیے۔

4.29 کوئی گولی افق سے 30^0 کے زاویے پر داغی گئی ہے اور وہ زمینی سطح پر 3 km دور گرتی ہے۔ اس کے پروجیکشن کے زاویے کو موافق کر کے کیا 5 km دور واقع کسی نشانے پر مارنے کی امید کی جاسکتی ہے؟ نالی کے منہ سے نکلتے وقت گولی کی چال کو متعین مانیے اور ہوائی مزاحمت کو نظر انداز کریئے۔

4.30 کوئی لڑاکو جہاز 1.5km کی اونچائی پر 720 km/h کی چال سے افقی سمت میں اڑ رہا ہے اور کسی اینٹی ایئر کرافٹ گن کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے۔ عمودی طور پر توپ کی نال کا کیا زاویہ ہو جس سے $600\ ms^{-1}$ کی چال میں داغا گیا گولا جہاز پر وار کر سکے۔ جہاز کے پائلٹ کو کسی کم ترین اونچائی پر جہاز کو اڑانا چاہیے جس سے گولا لگنے سے بچ سکے؟ $[g = 10\ m\ s^{-2}]$

4.31 ایک سائیکل سوار 27 km/h کی چال سے سائیکل چلا رہا ہے۔ جیسے ہی سڑک پر وہ 80m نصف قطر کے دائری موڑ پر پہنچتا ہے، وہ بریک لگاتا ہے اور اپنی چال 0.5 m/s کی یکساں شرح سے کم کر لیتا ہے۔ دائری موڑ پر سائیکل سوار کے کل اسراع کی عددی قدر اور اس کی سمت نکالیے۔

(a) ثابت کیجیے کہ کسی پروجکٹائل کے x- محور اور اس کی رفتار کے درمیان کے زاویے کو وقت کے تفاعل کے طور پر درج ذیل طور پر ظاہر کر سکتے ہیں،

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{ox}}\right)$$

(b) ثابت کیجیے کہ مبدا سے پھینکے گئے پروجیکٹائل کے لیے پروجکشن زاویے کی قدر $\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$ سے ظاہر کی جاسکتی ہے۔ یہاں استعمال کی گئی علامتوں کے معنی معمول کے مطابق ہیں۔